2. Klausur aus der Mathematik am 22.5.2012, Klasse 11Qd

Alle Ergebnisse sind mit Zwischenschritten nachvollziehbar darzustellen.

1. Bestimmen Sie jeweils den Term der Ableitungsfunktion

a: f(x) = $x * e^{-2x}$ b: f(x) = ln(x-3)

c: f(x) = $1/\ln(3x))$ d: f(x) = $\frac{\ln(x)}{e^x-1}$

2. Geben Sie jeweils den Definitionsbereich über R an

a: f(x) = $\sqrt{1-x^2}$ b: f(x) = $\sqrt{e-e^x}$

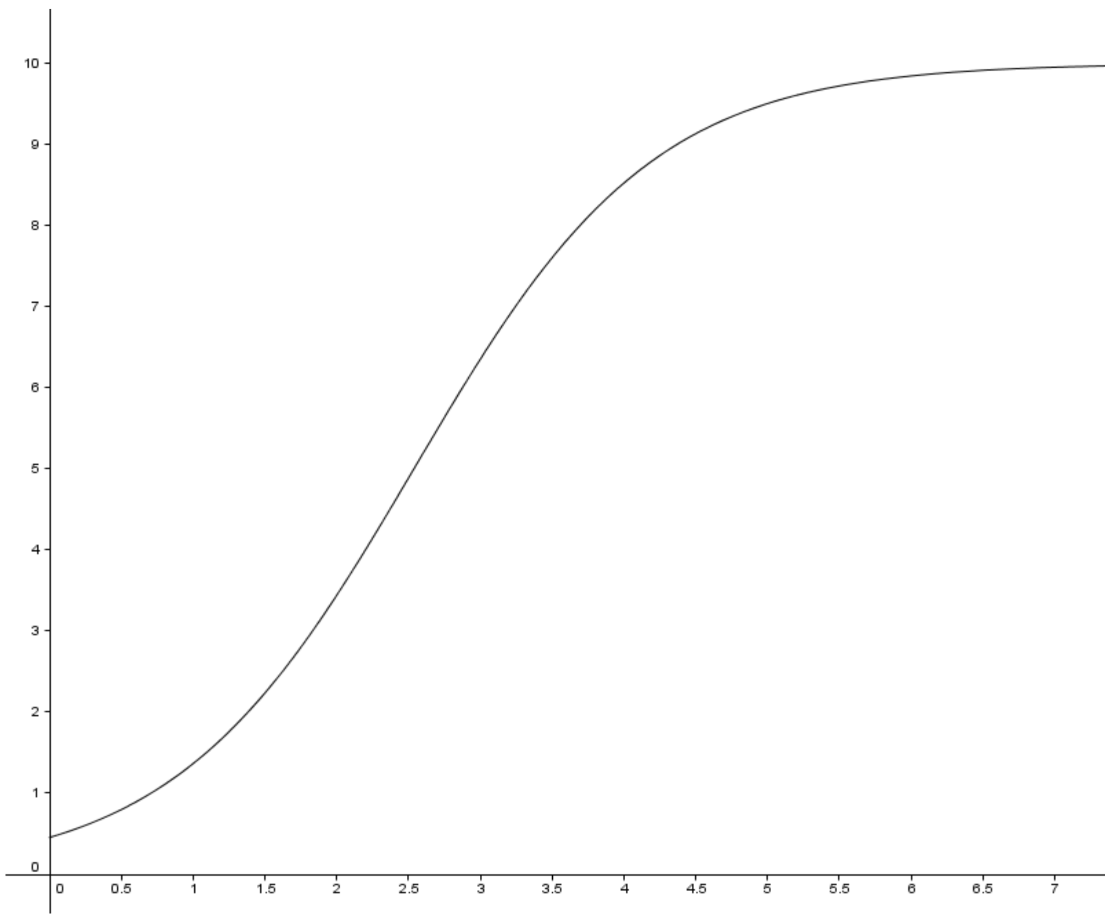
d: f(x) = $\ln(\frac{1}{x-1})$ d: f(x) = $\frac{1}{e^{-x}-2}$

3. Die Funktion f: x $\mapsto 10 * \frac{e^{1.2x}}{e^{1.2x}+21}, \quad x \geq 0$ zeigt den Steigflug eines Flugzeuges in der Einheit km - siehe Diagramm. Dabei bezieht sich die Höhe x = 0 km auf Normalnull – also Höhe über dem Meeresspiegel.

Der Funktionswert f(x) gibt die Höhe über Normalnull in km an.

Als Steigflug bezeichnet man den gesamten Vorgang bis zum Erreichen der Reisehöhe.

**Vorsicht:** Diagramm ist nicht maßstabsgetreu !!



a: Zeigen Sie durch Ausklammern von $e^{1.2x}$ mit Hilfe einer Termbetrachtung, dass für große x-Werte eine Reisehöhe von 10 km über Normalnull erreicht wird.

b: Zeigen Sie, dass der Steigflug zum Abflug von München Erding ( 450 m über Normalnull ) passen könnte.

c: Bestätigen Sie für die Ableitungsfunktion

$$f'(x) = 252 * \frac{e^{1.2x}}{(e^{1.2x}+21)^2}$$

d: Der Steigwinkel wird abgelesen als der Schnittwinkel der Tangente an die Steigkurve mit der x – Achse.

Bestimmen Sie grafisch ( Steigungsdreieck einzeichnen – verwendete Werte müssen deutlich werden ) den Steigwinkel zur Entfernung x = 2,3 km vom Startpunkt .

e: Skizzieren Sie einen Funktionsgraphen, der zeigt, wie sich der Steigwinkel mit der Entfernung x vom Startpunkt entwickelt.

f: Der Steigwinkel erreicht beim Steigflug einen maximalen Wert in der Entfernung z km vom Abflugpunkt.

Erläutern Sie kurz, welcher besondere Punkt W einer Kurve hier beschrieben wird und geben Sie ein mögliches Verfahren an, um diesen Punkt genau zu erfassen ( berechnen ).

g: Zur Berechnung von z stößt man auf folgende Gleichung:

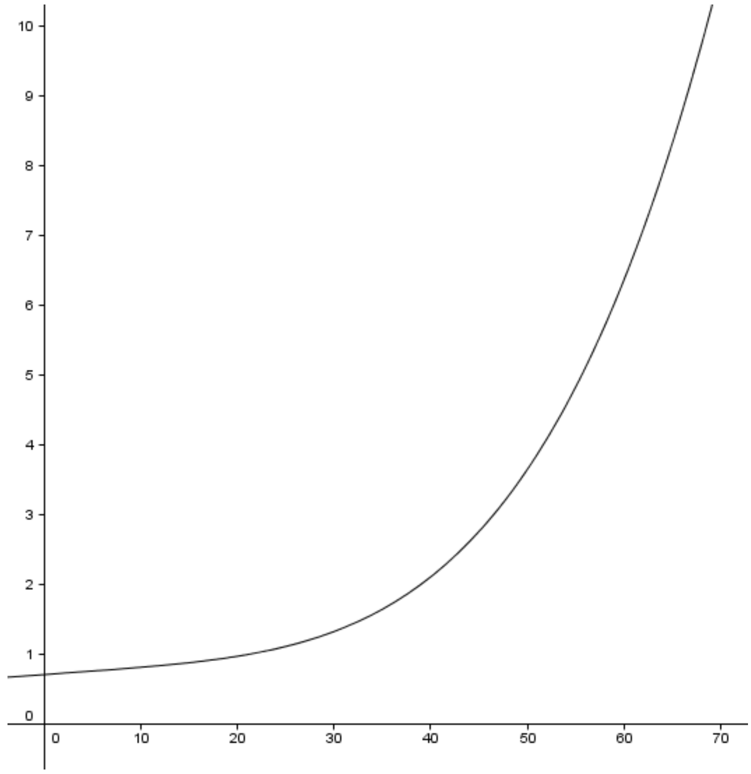
**$21 - 1{,}4\, e^{1{,}2\, z} = 0$.**

Berechnen Sie z und dann den maximalen Steigwinkel $\alpha$ in Grad genau

[ Zwischenergebnisse: z = 2,3 [ km ], $\alpha = 60^0$ ]

h: Der Steigflug wird näherungsweise durch die Tangente in W aus e ersetzt.

Das untenstehende Diagramm gibt Ihnen den Kerosinverbrauch pro 100 m Höhengewinn in Abhängigkeit vom Steigwinkel $\alpha$ an.




Schätzen Sie den Kerosinverbrauch für den gesamten Steigflug entlang der Tangente ab – alle Rechenschritte müssen nachvollziehbar dargestellt werden.

4. Auf einem PC werden in einem Musikarchiv 8460 Musiktitel aus der Zeit von 1960 – 1999 verwaltet. Es gibt mehrere Möglichkeiten diese Titel zu filtern:

nach Musikrichtungen: Rock ( R ) oder „nicht Rock“ $\overline{R}$

nach Perioden: $M_{80}$ = „aus den Achtzigern“, …….

nach Sprache: deutsch ( D ) oder „nicht deutsch“ ( $\overline{D}$ )

Insgesamt sind im Musikarchiv 5 mal so viele „nicht deutsche“ Musiktitel wie „deutsche“. Das Verhältnis der Titel aus den Bereichen Rock und „nicht Rock“ ist sowohl in den Teilbereichen „deutsch“ als auch „nicht deutsch“ 4:1.

a: Erstellen Sie eine Vierfeldertafel für die Ereignisse „deutsch“ und „Rock“ – ausgehend von der absoluten Zahl x im Feld „deutsch“.
Bestimmen Sie den Wert für x und die restlichen Feldbelegungen.

Zwischenergebnis:

| | **D** | $\overline{D}$ | |
|---|---|---|---|
| **R** | **1128** | | |
| $\overline{R}$ | | | **1692** |
| | **1410** | | **8460** |

b: Erstellen Sie einen Baum in der Abfolge „D" – „R" auf % gerundet.

c: Zeigen Sie anhand einer Berechnung, dass die beiden Ereignisse „nicht deutsch" und „kein Rocktitel" stochastisch unabhängig sind.

d: Geben Sie folgende Wahrscheinlichkeiten an:

- Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Titel ein „nicht deutscher Rocktitel" ist.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Rocktitel nicht deutsch ist.

Die Software liefert eine Liste aller deutscher Titel, von der zufällig einer ausgewählt und gespielt wird.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man dann keinen Rocktitel hört.

e: Unten sehen Sie einen Ausschnitt aus der Titelliste – geordnet nach der Zugehörigkeit zu Musikperioden.
Geben sie alle in dieser Liste enthaltenen Titel an, die zu folgendem Ereignis gehören: $\overline{M_{70} \cup M_{80} \cup M_{90}}$

| Titel | 60 | 70 | 80 | 90 |
|---|---|---|---|---|
| Abba: Greatest Hits | | | | X |
| Elvis Presley: Girls, girls, girls! | X | | | |
| Tracy Chapman | | | X | |
| We can't dance | | | | X |
| Roy Orbison: Oh, pretty woman | X | | | |
| The Beatles 1962 - 1966 | | X | | |
| Michael Jackson: Bad | | | X | |
| Fleetwood Mac: Rumours | | X | | |

2. Klausur aus der Mathematik am 22.5.2012, Klasse 11Qd Lösungsvorschlag

Alle Ergebnisse sind mit Zwischenschritten nachvollziehbar darzustellen.

1. Bestimmen Sie jeweils den Term der Ableitungsfunktion

a: $f(x) = x * e^{-2x}$ b: $f(x) = \ln(x-3)$

c: $f(x) = 1/\ln(3x))$ d: $f(x) = \frac{\ln(x)}{e^x-1}$

$a\colon\ f'(x) = 1 * e^{-2x} + x * e^{-2x} * (-2) = e^{-2x} * (1 - 2x)$

$b\colon f'(x) = \frac{1}{x-3} * 1$ $c\colon\ f'(x) = -\frac{\frac{1}{3x} * 3}{(\ln(3x))^2} = -\frac{1}{x * \ln^2(3x)}$

$d\colon\ f'(x) = \frac{\left[\frac{1}{x} * (e^x - 1) - \ln(x) * e^x\right]}{[(e^x - 1)^2]}$

2. Geben Sie jeweils den Definitionsbereich über R an

a: $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ $D = [-1; 1]$

b: $f(x) = \sqrt{e - e^x}$ $D = ]-\infty; 1]$

d: $f(x) = \ln(\frac{1}{x-1})$ $D = ]1; +\infty[$

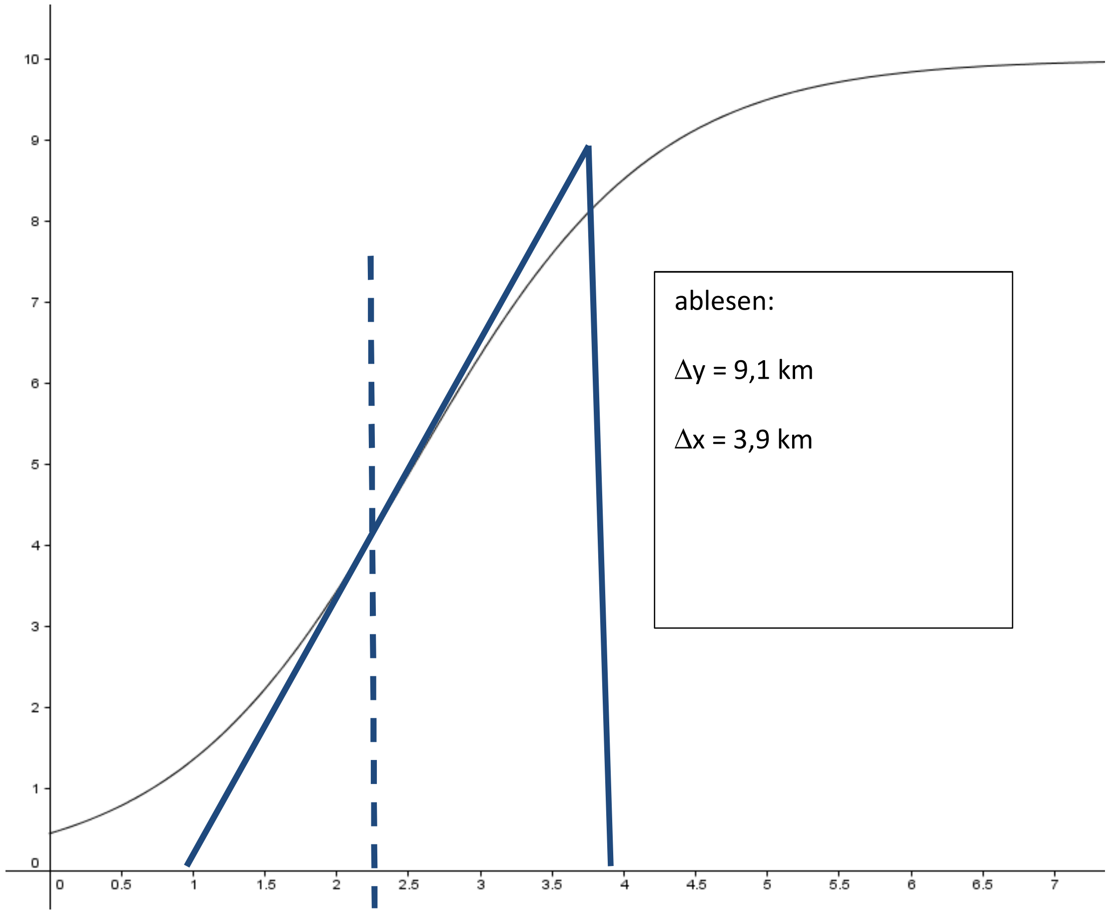
d: $f(x) = \frac{1}{e^{-x}-2}$ $D = R\ \{-\ln(2)\}$

3. Die Funktion f: $x \mapsto 10 * \frac{e^{1.2x}}{e^{1.2x}+21}, \quad x \geq 0$ zeigt den Steigflug eines Flugzeuges in der Einheit km - siehe Diagramm. Dabei bezieht sich die Höhe x = 0 km auf Normalnull – also Höhe über dem Meeresspiegel.

Der Funktionswert f(x) gibt die Höhe über Normalnull in km an.

Als Steigflug bezeichnet man den gesamten Vorgang bis zum Erreichen der Reisehöhe.

**Vorsicht:** Diagramm ist nicht maßstabsgetreu !!




a: Zeigen Sie durch Ausklammern von $e^{1.2x}$ mit Hilfe einer Termbetrachtung, dass für große x-Werte eine Reisehöhe von 10 km über Normalnull erreicht wird.

f(x) = $10 * \frac{e^{1,2x}}{\left[e^{1,2x} * \left(1+\frac{21}{e^{1,2x}}\right)\right]} = 10 * \frac{1}{1+\frac{21}{e^{1,2x}}} \to 10\ da\ \ 1 + \frac{21}{e^{1,2x}}\ \to 1\ für\ x \to \infty$b:

b: Zeigen Sie, dass der Steigflug zum Abflug von München Erding ( 450 m über Normalnull ) passen könnte.

Abflug heißt hier: x = 0

$f(0) = 10 * \frac{e^0}{e^0+21} = \frac{10}{22} = 0{,}4545 \ldots = 450\ [m]$

c: Bestätigen Sie für die Ableitungsfunktion

**f'(x) = 252 *** $\frac{e^{1.2x}}{(e^{1.2x}+21)^2}$

$$f'(x) = 10 * \frac{\left[e^{1,2x} * 1{,}2 * \left(e^{1,2x}+21\right) - e^{1,2x} * \left(e^{1,2x} * 1{,}2\right)\right]}{(e^{1,2x}+21)^2} =$$

$$10 * \frac{\left[1{,}2 * e^{2*1,2x}\ + 21 * 1{,}2 e^{1,2x} - 1{,}2 * e^{2*1,2x}\right]}{(e^{1,2x}+21)^2} =$$

$$10 * \frac{21 * 1{,}2 * e^{1,2x}}{(e^{1,2x}+21)^2} = 252 * \frac{e^{1,2x}}{(e^{1,2x}+21)^2}$$

d: Der Steigwinkel wird abgelesen als der Schnittwinkel der Tangente an die Steigkurve mit der x – Achse.

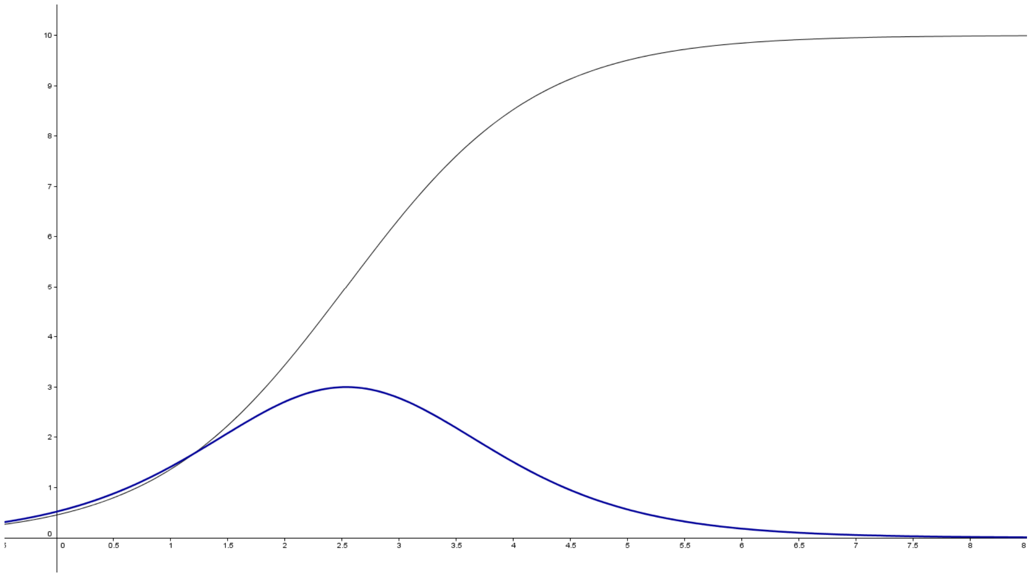
Bestimmen Sie grafisch ( Steigungsdreieck einzeichnen – verwendete Werte müssen deutlich werden ) den Steigwinkel zur Entfernung x = 2,3 km vom Startpunkt .

aus Diagramm: $\tan(\alpha) = \frac{9{,}1}{3{,}9} \;|\sim \tan^{-1} \Leftrightarrow \;\; \alpha \approx 67^0$

e: Skizzieren Sie einen Funktionsgraphen, der zeigt, wie sich der Steigwinkel mit der Entfernung x vom Startpunkt entwickelt.

Anforderungen an die Kurve - eigentlich $G_{f'}$ :

* bei x = 0 gilt: f'(0) = 0
* für x gegen unendlich: f'(x) = 0
* streng monoton steigend bis ca. x = 2,3, dann streng monoton fallend



f: Der Steigwinkel erreicht beim Steigflug einen maximalen Wert in der Entfernung z km vom Abflugpunkt.

Erläutern Sie kurz, welcher besondere Punkt W einer Kurve hier beschrieben wird und geben Sie ein mögliches Verfahren an, um diesen Punkt genau zu erfassen ( berechnen ).

Erläuterung:

Hier wird die Frage nach dem Wendepunkt von $G_f$ gestellt – also sind folgende Verfahren möglich ( eines genügt ! ):

1. f''(z) = 0 und f'''(z) <> 0

2. f''(z) = 0 und Nachweis des Vorzeichenwechsels für f'' bei z

g: Zur Berechnung von z stößt man auf folgende Gleichung:

**21 – 1,4 $e^{1,2\,z}$ = 0.**

Berechnen Sie z und dann den maximalen Steigwinkel $\alpha$ in Grad genau

$21 = 1{,}4\,e^{1{,}2x} \;\; \Leftrightarrow \;\; \frac{21}{1{,}4} = 15 = e^{1{,}2x} \;\; | \sim \ln \Leftrightarrow \;\; 1{,}2x = \ln(15) \;\; | \sim \frac{1}{1{,}2} \Leftrightarrow x = \frac{\ln(15)}{1{,}2} = 2{,}3 \ldots.$

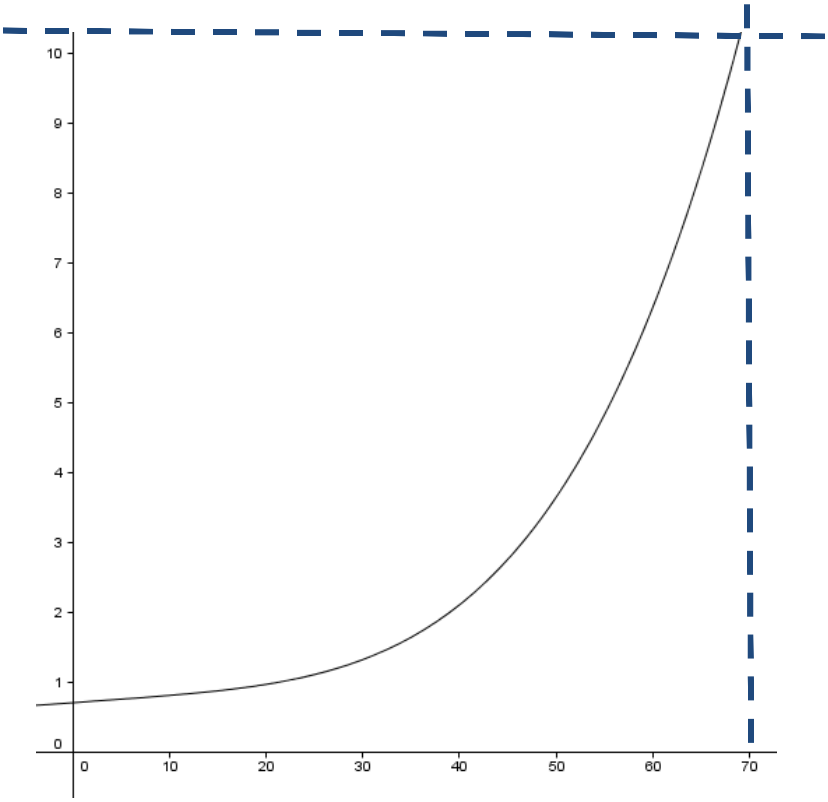
$in\ f'einsetzen\text{:}\;\; f'(2{,}3) = 252 * \frac{e^{1{,}2*2{,}3}}{(e^{1{,}2*2{,}3}+21)^2} = 2{,}94 \ldots$

$\tan(\alpha) = 2{,}94 \;|\sim \tan^{-1} \Rightarrow \;\; \alpha \approx 71^0$

[ Zwischenergebnisse: z = 2,3 [ km ], $\alpha = 71^0$ ]

h: Der Steigflug wird näherungsweise durch die Tangente in W aus e ersetzt.

Das untenstehende Diagramm gibt Ihnen den Kerosinverbrauch pro 100 m Höhengewinn in Abhängigkeit vom Steigwinkel $\alpha$ an.




Schätzen Sie den Kerosinverbrauch für den gesamten Steigflug entlang der Tangente ab – alle Rechenschritte müssen nachvollziehbar dargestellt werden.

aus dem Diagramm: Verbrauch pro 100 m Steigflug ca. 10,2 L, also bei einem Aufstieg von 450 m auf 10000 m: 10,2 L * 95,5 = 970 L

4. Auf einem PC werden in einem Musikarchiv 8460 Musiktitel aus der Zeit von 1960 – 1999 verwaltet. Es gibt mehrere Möglichkeiten diese Titel zu filtern:

nach Musikrichtungen: Rock ( R ) oder „nicht Rock“ $\overline{R}$

nach Perioden: $M_{80}$ = „aus den Achtzigern“, …….

nach Sprache: deutsch ( D ) oder „nicht deutsch“ ( $\overline{D}$ )

Insgesamt sind im Musikarchiv 5 mal so viele „nicht deutsche“ Musiktitel wie „deutsche“. Das Verhältnis der Titel aus den Bereichen Rock und „nicht Rock“ ist sowohl in den Teilbereichen „deutsch“ als auch „nicht deutsch“ 4:1.

a: Erstellen Sie eine Vierfeldertafel für die Ereignisse „deutsch“ und „Rock“ – ausgehend von der absoluten Zahl x im Feld „deutsch“.
Bestimmen Sie den Wert für x und die restlichen Feldbelegungen.

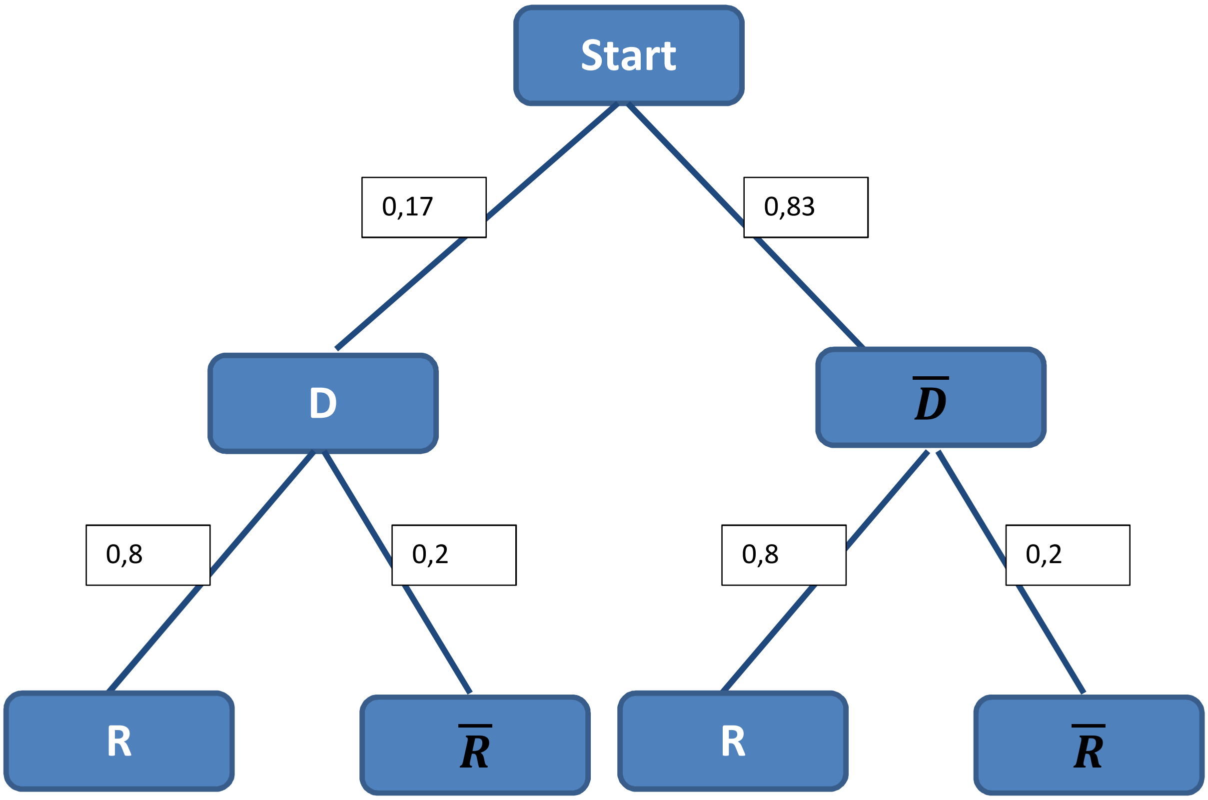
| | **D** | $\boldsymbol{\overline{D}}$ | |
|---|---|---|---|
| **R** | **0,8x** | **4x** | **4,8x** |
| $\boldsymbol{\overline{R}}$ | **0,2x** | **1x** | **1,2x** |
| | **x** | **5x** | **8460** |

Damit erhält man: 6x = 8460 $\Rightarrow x = 1410\ oder\ Kontrolle$:
$4{,}8x + 1{,}2x = 6x \quad d.h. ebenfalls\ 6x = 8460$

Zwischenergebnis:

| | **D** | $\boldsymbol{\overline{D}}$ | |
|---|---|---|---|
| **R** | **1128** | **5640** | **6768** |
| $\boldsymbol{\overline{R}}$ | **282** | **1410** | **1692** |
| | **1410** | **7050** | **8460** |

b: Erstellen Sie einen Baum in der Abfolge „D“ – „R“ auf % gerundet.




c: Zeigen Sie anhand einer Berechnung, dass die beiden Ereignisse „nicht deutsch“ und „kein Rocktitel“ stochastisch unabhängig sind.

zu zeigen: $P(\overline{D} \cap \overline{R}) = P(\overline{D}) * P(\overline{R})$

linke Seite: $P(\overline{D} \cap \overline{R}) = \frac{1410}{8460} = \frac{1}{6}$

rechte Seite: $P(\overline{D}) * P(\overline{R}) = \frac{5}{6} * \frac{1}{5} = \frac{1}{6}$

d: Geben Sie folgende Wahrscheinlichkeiten an:

- Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Titel ein „nicht deutscher Rocktitel“ ist.

$$P(R \cap \overline{D}) = \frac{5640}{8460} = \frac{2}{3}$$

- Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Rocktitel nicht deutsch ist.

$$P_R(\overline{D}) = \frac{5640}{6768} = \frac{5}{6}$$

Die Software liefert eine Liste aller deutscher Titel, von der zufällig einer ausgewählt und gespielt wird.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man dann keinen Rocktitel hört.

$$P_D(\overline{R}) = \frac{282}{1410} = \frac{1}{5}$$

e: Unten sehen Sie einen Ausschnitt aus der Titelliste – geordnet nach der Zugehörigkeit zu Musikperioden.
Geben sie alle in dieser Liste enthaltenen Titel an, die zu folgendem Ereignis gehören: $\overline{M_{70} \cup M_{80} \cup M_{90}}$
algebraisch: $= \overline{M_{70}} \cap \overline{M_{80}} \cap \overline{M_{90}}$

also alle Titel, die nicht in die 70 und gleichzeitig nicht in die 80 und gleichzeitig nicht in die 80 Jahre gehören: alle Titel aus den 60 Jahren

oder mit Überlegung:

alle Titel, die nicht in die 70 oder die 80 oder die 90 Jahre gehören – also alle Titel aus den 60 Jahren

| Titel | 60 | 70 | 80 | 90 |
|---|---|---|---|---|
| Abba: Greatest Hits | | | | X |
| Elvis Presley: Girls, girls, girls! | X | | | |
| Tracy Chapman | | | X | |
| We can't dance | | | | X |
| Roy Orbison: Oh, pretty woman | X | | | |
| The Beatles 1962 - 1966 | | X | | |
| Michael Jackson: Bad | | | X | |
| Fleetwood Mac: Rumours | | X | | |