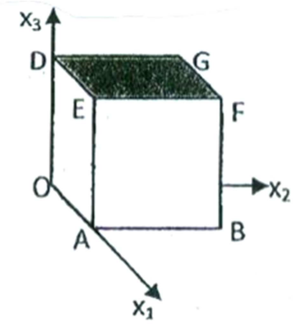
Q11 Kurshalbjahr 11/2	**Schulaufgabe aus der Mathematik** 08. April 2014
	Name: Lösungsvorschlag

1. Gegeben ist der Würfel OABCDEFG. Mit O(0|0|0), A(10|0|0) und F(10|10|10). Geben Sie den Radius und die Koordinaten des Mittelpunkts der Inkugel des Würfels sowie deren Gleichung an.



M(5/5/5), r = 5

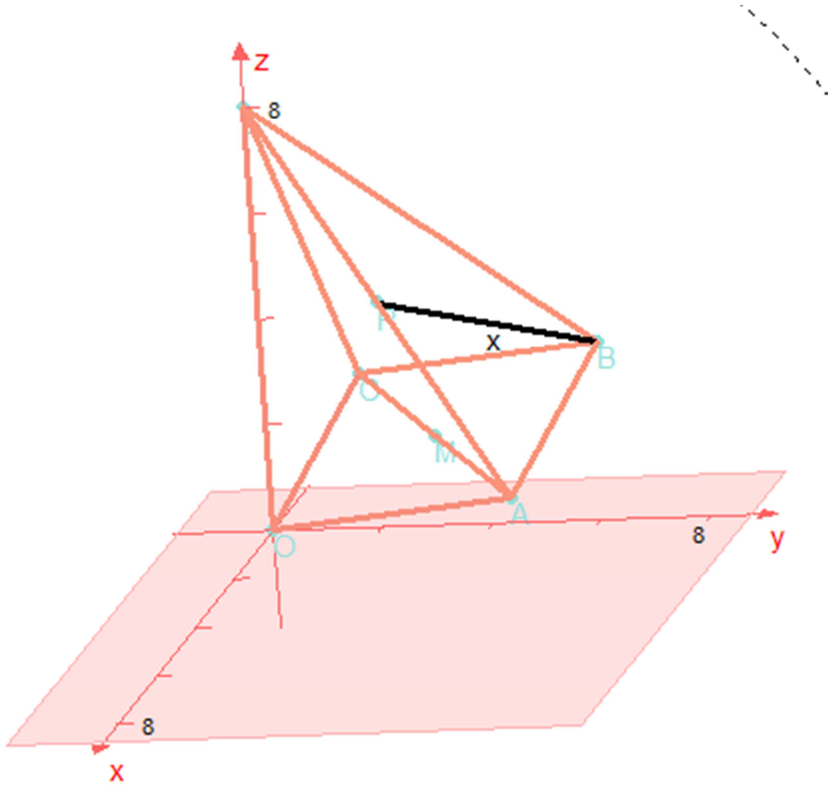
$(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 + (x_3 - 5)^3 = 25$

2. In einem kartesischen KS mit Ursprung O sind die Punkte A(-1/4/0) und C(-2/1/2) gegeben.

a: Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M der Strecke [AC]

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 2{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b: Fertigen Sie ein KS laut Skizze an
- (halbes DIN-A3 Blatt) -
und tragen Sie dort die Punkte A, C und M ein.
Der Ursprung O wird an M gespiegelt und ergibt den Punkt B. Zeichnen Sie B in das KS ein und bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes B (nachvollziehbar) rechnerisch



$$\vec{b} = 2 * \vec{m} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{m} + \quad \vec{m} = \quad \vec{a} + \quad \vec{c}$$

c: Zeigen Sie, dass es sich bei dem Viereck OABC um ein Parallelogramm handelt und berechnen Sie alle Innenwinkel.

zu zeigen: $\vec{a} \;=\; \overrightarrow{CB}$ *oder* $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$ *oder elementargeometrisch*: *Spiegelung*

$\angle(\,AOC\,) = \tau$ gilt: $\cos(\tau) = \frac{\vec{a}*\vec{c}}{a*c} = \frac{2+4+0}{\sqrt{17}*\sqrt{9}} = \frac{2}{\sqrt{17}} \mid \sim \cos^{-1} \Rightarrow \quad \tau = 60{,}1^0$

Daraus ergeben sich die anderen 3 Winkel ohne weitere Berechnung

$\angle(\,AOC\,) = \angle(\,CBA\,)$ *und* $\angle(\,BAO\,) = \;\angle(\,OCB\,) = 119{,}9^0$

d: Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt des Parallelogramms $3\sqrt{13}\;\; FE$ beträgt.

$$A = \mid \vec{a}\; X\; \vec{c} \mid = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 4*2-0 \\ -[-1*2-0] \\ -1*1+4*2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{8^2+2^2+7^2} = \sqrt{117} =$$

$3\sqrt{13}\;\; [\,FE]$

e: Der Punkt S(0/0/8) bildet die Spitze einer Pyramide OABCS.
Berechnen Sie mit Hilfe des Spatproduktes das Volumen dieser Pyramide.

mit dem Ergebnis aus d

$$V = 2 * \frac{1}{6} * \mid \vec{s} * [\,\vec{a}\; X\; \vec{c}\,]\mid = \frac{1}{3} * \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \right| = \frac{56}{3} = 18\frac{2}{3} \quad [\,VE\,]$$

g: Der Punkt P liegt von S aus 4,5 LE in Richtung A auf der Kante SA.
Bestimmen Sie die Koordinaten von P.

$$\overrightarrow{SA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \; mit \;\; \overrightarrow{SA}^0 = \frac{1}{\sqrt{1^2+4^2+8^2}} * \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p} = \;\; \vec{s} + \frac{4{,}5}{9} * \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

h: Berechnen Sie den Abstand des Punktes P vom Eckpunkt B.

$$\overline{PB} = \mid \overrightarrow{PB} \mid = \left| \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2{,}5^2+3^2+2^2} = \sqrt{19{,}25} = \frac{1}{2}\sqrt{77} = 4{,}39..$$

3. Bestimmen Sie für die angegebenen Funktionen die Ableitungsfunktion (**<u>ohne</u>** weitere Vereinfachung).

a) $f(x)=x\cdot\sqrt{4-x^2}$ $\quad f'(x) = 1*\sqrt{4-x^2} + x * \frac{1}{2*\sqrt{4-x^2}} * (-2x)$

b) $f(x)=(\sin x+2x)^3$ $\quad f'(x) = 3*(\sin(x)+2x)^2 * (\cos(x)+2\,)$

c) $f(x)=\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2$ $\quad f'(x) = 2*\sin\left(\frac{1}{x}\right) * \cos\left(\frac{1}{x}\right) * \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

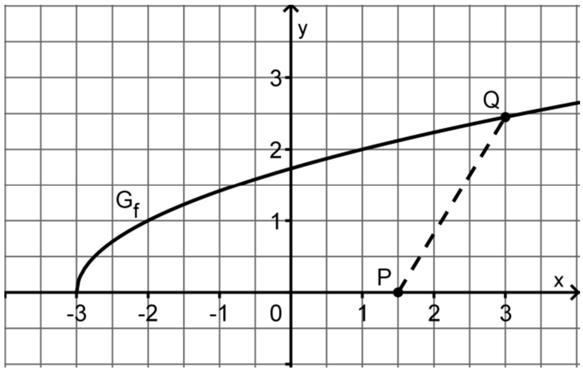
4. Die Funktion f(x) = x – sin(x) -4 besitzt im Intervall [0;π] genau eine Nullstelle – kein Nachweis erforderlich.

Bitte wenden!

Berechnen Sie ausgehend vom Startwert $x_o = 2$ die nächsten 2 Näherungswerte mit dem Newtonverfahren.
mit f‘(x) = 1 – cos(x) erhält man:
$x_1 = 4{,}05\ldots.$, $x_2 = 3{,}52\ldots\ldots.$

5. Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \sqrt{x+3}$ mit der Definitionsmenge D_f.

Die Abbildung zeigt den Graphen G_f von f, einen beliebigen Punkt **Q(x│f(x))** auf G_f sowie den Punkt **P(1,5│0)** auf der x-Achse.



a) Begründen Sie, dass $D_f = [\,-3;+\infty\,[$ die maximale Definitionsmenge von f ist.

$Bed.: \; x+3 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \geq -3$

b) Zeigen Sie, dass für die Entfernung d(x) des Punkts **Q(x│f(x))** vom Punkt **P(1,5│0)** gilt:

$$d(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5{,}25}$$

mit Pythagoras: $d^2 = (x-1{,}5)^2 + \left(f(x)\right)^2 = x^2 - 3x + 2{,}25 + (x+3) = x^2 - 2x + 5{,}25$

c) Bestimmen Sie rechnerisch mit Hilfe der Ableitungsfunktion die Koordinaten desjenigen Graphenpunkts $Q_F(x_F│y_F)$, der von P den kleinsten Abstand hat (Extremwert – kein Nachweis des Vorzeichenwechsels nötig!).
Tragen Sie Q_F in die Abbildung ein.

Bed: $f'(x) = 0 \;\; mit \; d'(x) = \frac{1}{2*\sqrt{x^2-2x+5{,}25}} * (2x-2) = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$

Q_F (1 / 2)

d) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an G_f im Punkt $T(1│?) \in G_f$. Weisen Sie nach, dass die Verbindungsstrecke [PT] und die Tangente an G_f im Punkt T senkrecht zueinander sind.

Tangentengleichung mit $x_0 = 1, y_0 = 2 \; und \; f'(1) = \frac{1}{2*\sqrt{1+3}} * 1 = \frac{1}{4}$

$t: y = \frac{1}{4} * (\,x - 1\,) + 2 = \frac{1}{4} * x + 1{,}75$

Steigungsdreieck liefert: $m = -\frac{2}{0{,}5} = -4 \;\; und \; damit \; gilt: \; m * m_t = -4 * \frac{1}{4} = -1$