2. Klausur aus der Mathematik am 4.5.2010
Klasse 11Q3

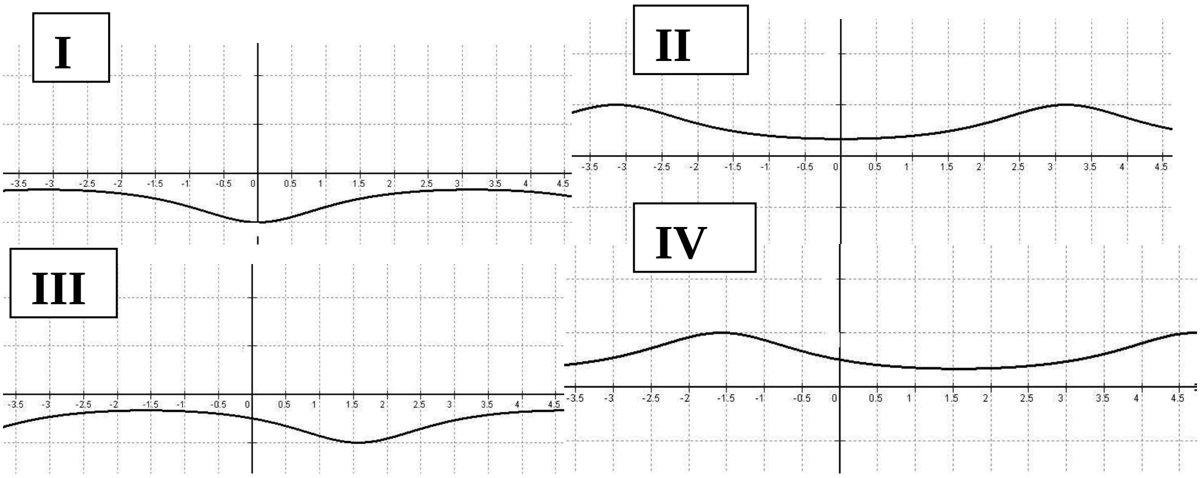
1. Bestimme für die angegebenen Funktionen die Ableitungsfunktion (ohne weitere Vereinfachung) und den maximal möglichen Definitionsbereich.

a: $f(x) = \frac{\sqrt{4+x^2}}{x}$ b: $f(x) = \sqrt{\sqrt{4-x^2}}$ c: $f(x) = (\sin^2(x) + x)^3$

2. Die Diagramme zeigen 4 verschiedene Funktionsgraphen.

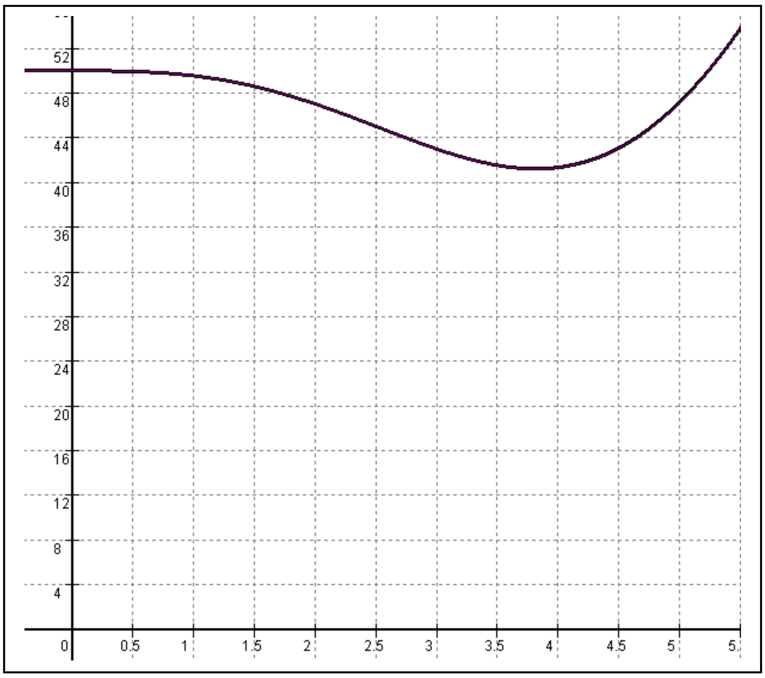
Zwei davon zeigen die Graphen zu $f(x) = \frac{1}{\sin(x)+2}$ *und* $g(x) = \frac{1}{\cos(x)-2}$

Vorsicht: Es sind keine Einheiten auf der y-Achse angegeben!



Welche der 4 Graphen zeigen die Graphen zu diesen beiden Funktionen? Entscheiden Sie sich und formulieren Sie Ihre Argumente möglichst exakt!

3. Bei einer empirischen Untersuchung wird folgender Zusammenhang zwischen der Produktionsqualität Q und dem Wochenverlauf in Tagen t festgestellt



Q(t) = a-0,8*sin(0,6*t)*t^2

a: Entnehmen Sie aus dem Diagramm den Wert für a
[Falsches Zwischenergebnis: a = 32]

b: Die Woche wird hier mit
Montag – 1
Dienstag – 2, ...
dargestellt.
Interpretieren Sie den Kurvenverlauf

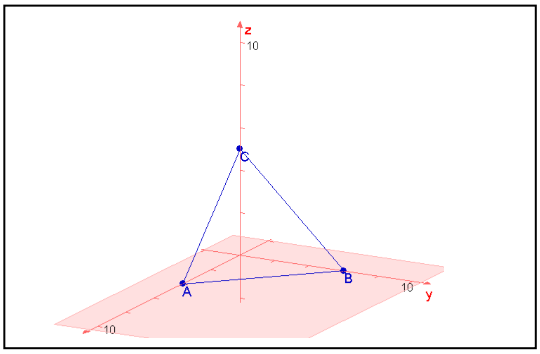
c: Schätzen Sie den prozentualen Produktionsverlust im Vergleich zwischen Montag und Donnerstag ab.

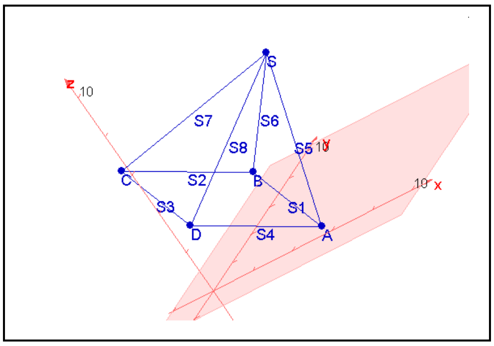
d: Stellen Sie die Ableitungsfunktion f’ auf und bestimmen Sie die Tangentengleichung t an den Graphen in P(5/?).

e: Die Nullstelle der Ableitungsfunktion f’ lässt sich nicht so einfach berechnen. Zeigen Sie mit einfachen Mitteln, dass zwischen x = 3 und x = 5 eine solche Nullstelle vorliegen muss.

4. Bestimmen Sie die Ableitung zu f: $x \mapsto (\sqrt{x})^5$ mit der Kettenregel und bestätigen Sie damit die allgemeine Ableitungsregel für Potenzfunktionen.

5. Vorgegeben sind die Punkte A(4/0/0), B(0/6/0) und C(0/0/5)
Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks A(ABC).





6. Eine Kugel wird durch k: $(x_1-2)^2 + x_2^2 + (x_3+3)^2 = 196$ angegeben.
Geben Sie Mittelpunkt M und den Radius r der Kugel an.
Liegt der Punkt P(-1/5/-2) innerhalb oder außerhalb der Kugel?

7. Die 4 Punkte A, B, C und D bilden zusammen mit S eine **gerade** quadratische Pyramide.

a: Ergänzen Sie die Punkte A(5|1|0), B(1|5|2) und C (-1|1|?) zu einem Quadrat ABCD.
Bedingung: $c_3 > 0$
[Zwischenergebnis: $c_3 = 6$ D(3/-3/4)]

b: Bestimmen Sie den Mittelpunkt M des Quadrates.
[Zwischenergebnis: M(2/1/3)]

c: Stellen Sie einen Vektor $\vec{n}$ n auf, der sowohl auf $\overrightarrow{MA}$ als auch auf $\overrightarrow{MB}$ senkrecht steht.

[Zwischenergebnis: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}$]

d: Die Spitze S besitzt von der quadratischen Grundfläche den Abstand 6 LE.
Bestimmen Sie mit Hilfe des Einheitsvektors die Koordinaten von S.
Bedingung: $s_1 > 0$
[Zwischenergebnis: S(6/3/7)]

e: Unter welchem Winkel φ sieht ein Beobachter im Punkt S die Kante [AB] der Grundfläche?

f: Der Abstand zwischen S und der Grundfläche der Pyramide wird verdoppelt.
[Zwischenergebnis: S'(10/5/11)]
Zeigen Sie durch Rechnung, dass sich der Winkel φ annähernd halbiert.

Viel Erfolg

2. Klausur aus der Mathematik am 4.5.2010
Klasse 11Q3

1. Bestimme für die angegebenen Funktionen die Ableitungsfunktion (ohne weitere Vereinfachung) und den maximal möglichen Definitionsbereich.

a:

$$f(x) = \frac{\sqrt{4+x^2}}{x}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{4+x^2}} \bullet 2x \bullet x - \sqrt{4+x^2} \bullet 1}{x^2}$$

D = R\{0}

b:

$$f(x) = \sqrt{\sqrt{4-x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{4-x^2}}} \bullet \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}} \bullet (-2x)$$

D=[-2;2]

c:

$$f(x) = (\sin^2(x)+x)^3$$

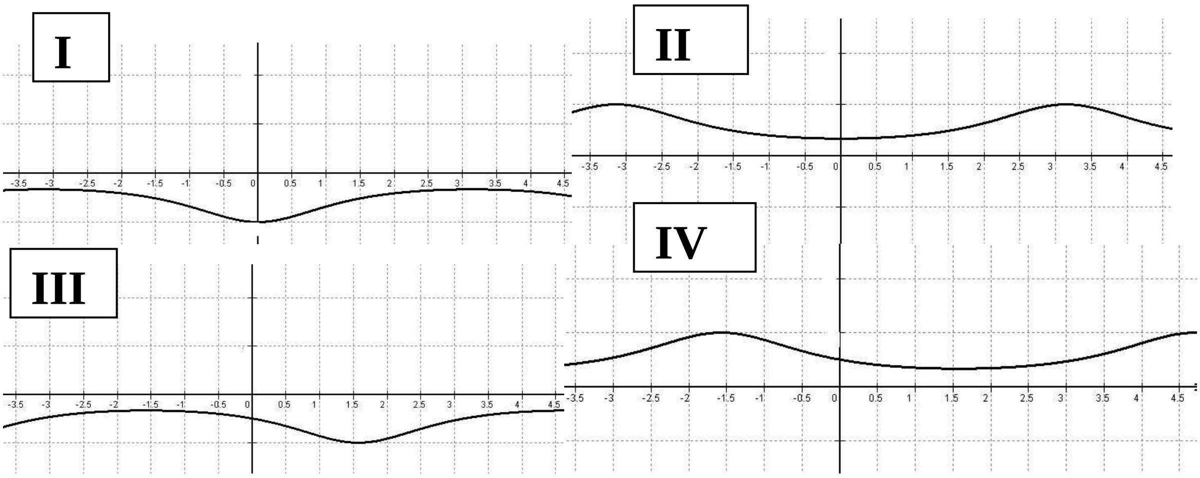
$$f'(x) = 3 \bullet (\sin^2(x)+x)^2 \bullet (2 \bullet \sin(x) \bullet \cos(x)+1)$$

D=R

2. Die Diagramme zeigen 4 verschiedene Funktionsgraphen.

Zwei davon zeigen die Graphen zu $f(x) = \frac{1}{\sin(x)+2}$ *und* $g(x) = \frac{1}{\cos(x)-2}$

Vorsicht: Es sind keine Einheiten auf der y-Achse angegeben!



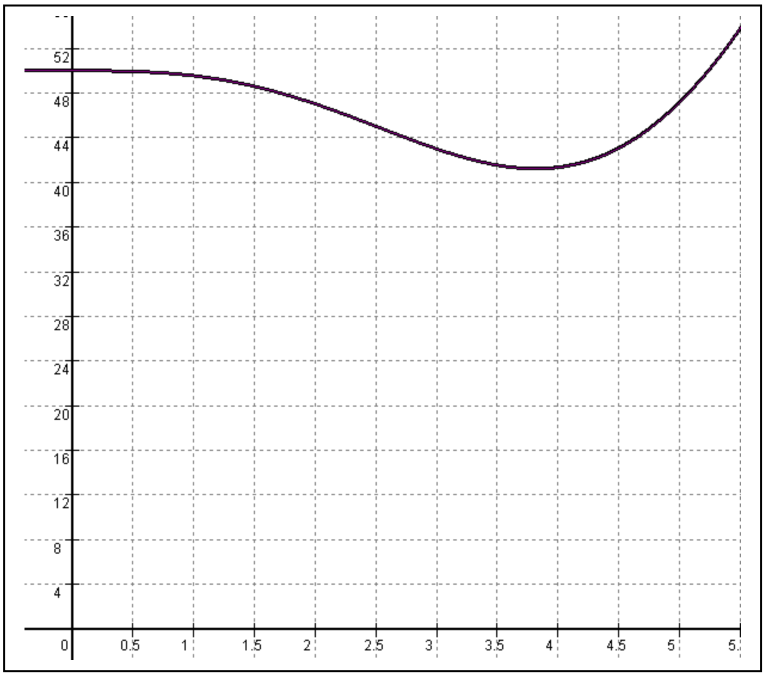
Welche der 4 Graphen zeigen die Graphen zu diesen beiden Funktionen?
Entscheiden Sie sich und formulieren Sie Ihre Argumente möglichst exakt!

zum Beispiel:

- sin(x)+2 > 0 für alle x-Werte, d. h. für f kommen nur II oder IV in Frage
- sin(x)+2 wird maximal für z. Bsp. x = π/2 ≈ 1,5, d. h. dort wird f minimal, also gilt: f ↔ IV
- cos(x)-2 < 0 für alle x-Werte, d. h. für f kommen nur I oder III in Frage
- |cos(x)-2| wird minimal für z. Bsp. x =0, d. h. dort wird |g| maximal, also g selber minimal: g ↔ I
-

3. Bei einer empirischen Untersuchung wird folgender Zusammenhang zwischen der Produktionsqualität Q und dem Wochenverlauf in Tagen t festgestellt

$Q(t) = a-0,8*\sin(0,6*t)*t^2$



a: Entnehmen Sie aus dem Diagramm den Wert für a
[Falsches Zwischenergebnis: a = 32]
Einsetzen von t = 0 ergibt:
Q(0) = a = 50

b: Die Woche wird hier mit
Montag – 1
Dienstag – 2, ...
dargestellt.
Interpretieren Sie den Kurvenverlauf

Die Qualität sinkt im Verlauf der Woche und erreicht am Donnerstag den niedrigsten Wert. Danach steigt die Qualität wieder an und erreicht am Freitag Abend den höchsten Wert.

c: Schätzen Sie den prozentualen Produktionsverlust im Vergleich zwischen Montag und Donnerstag ab.
Wert am Montag: 49 Wert am Donnerstag: 41
Verlust in %: 8/41 ≈ 20 %

d: Stellen Sie die Ableitungsfunktion f’ auf und bestimmen Sie die Tangentengleichung t an den Graphen in P(5/?).
$f'(t) = - 0,8*[\cos(0,6*t)*0,6*t^2 + \sin(0,6*t)*2*t\ )$
$f'(5) \approx 10,8$
$f(5) \approx 47$ (grafisch) oder exakt: $f(5) = 49,177..$
t: $y = 10,8 * (t – 5) + 49$

e: Die Nullstelle der Ableitungsfunktion f’ lässt sich nicht so einfach berechnen. Zeigen Sie mit einfachen Mitteln, dass zwischen x = 3 und x = 5 eine solche Nullstelle vorliegen muss.

Entweder grafische Interpretation des Funktionsgrafen oder Vorzeichenuntersuchung von f’

4. Bestimmen Sie die Ableitung zu f: $x \mapsto (\sqrt{x})^5$ mit der Kettenregel und bestätigen Sie damit die allgemeine Ableitungsregel für Potenzfunktionen.

$$f(x) = (\sqrt{x})^5 = (x^{\frac{1}{2}})^5 = x^{\frac{5}{2}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{5}{2} \bullet x^{\frac{3}{2}} \quad \textit{Potenzregel}$$

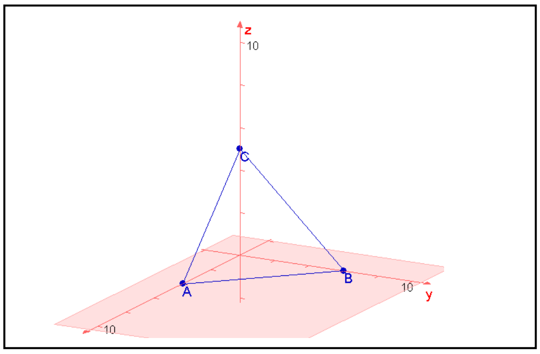
$$\Rightarrow f'(x) = 5 \bullet (\sqrt{x})^4 \bullet \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2} \bullet (\sqrt{x})^3 \quad \textit{Kettenregel}$$

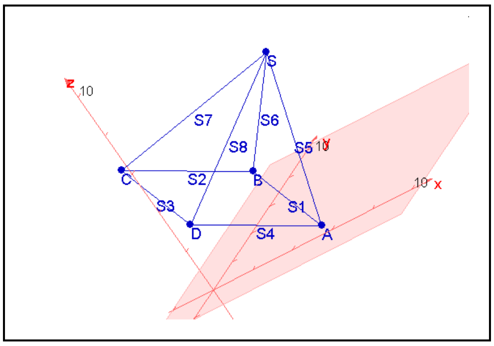
5. Vorgegeben sind die Punkte A(4/0/0), B(0/6/0) und C(0/0/5)
Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks A(ABC).

Mit dem Kreuzprodukt:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \bullet \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \bullet \left| \begin{pmatrix} 30-0 \\ -(-20+0) \\ 0+24 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \bullet \sqrt{900+400+576} = \frac{1}{2}\sqrt{1876}$$





6. Eine Kugel wird durch k: $(x_1-2)^2 + x_2^2 + (x_3+3)^2 = 196$ angegeben.
Geben Sie Mittelpunkt M und den Radius r der Kugel an.
Liegt der Punkt P(-1/5/-2) innerhalb oder außerhalb der Kugel?

M(2/0/-3) r = 14

$$\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{MP} = \sqrt{9+25+1} = \sqrt{35} < 14$$

Folgerung: P liegt innerhalb der Kugel

7. Die 4 Punkte A, B, C und D bilden zusammen mit S eine **gerade** quadratische Pyramide.

a: Ergänzen Sie die Punkte A(5|1|0), B(1|5|2) und C (-1|1|?) zu einem Quadrat ABCD.
Bedingung: $c_3 > 0$

Länge a:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow a = \sqrt{16+16+4} = 6$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ c-2 \end{pmatrix} \Rightarrow \sqrt{4+16+(c-2)^2} = 6 \Rightarrow |c-2| = 4 \Rightarrow c = 6 > 0$$

$$\vec{d} = \vec{a} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

oder mit M

$$\vec{m} = \frac{1}{2}[\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}] = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{d} = \vec{m} + \overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

[Zwischenergebnis: $c_3 = 6$ D(3/-3/4)]

b: Bestimmen Sie den Mittelpunkt M des Quadrates.
[Zwischenergebnis: M(2/1/3)]
siehe a

c: Stellen Sie einen Vektor $\vec{n}$ n auf, der sowohl auf $\overrightarrow{MA}$ als auch auf $\overrightarrow{MB}$ senkrecht steht.

mit Kreuzprodukt

$$\overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{n} = \overrightarrow{AM} \, X \, \overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+12 \\ -(-3-3) \\ 12-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

[Zwischenergebnis: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}$]

d: Die Spitze S besitzt von der quadratischen Grundfläche den Abstand 6 LE.
Bestimmen Sie mit Hilfe des Einheitsvektors die Koordinaten von S.
Bedingung: $s_1 > 0$

Einheitsvektor

$$\vec{n}^0 = \frac{\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{s} = \vec{m} \pm 6 \bullet \vec{n}^0 = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + 6 \bullet \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\3\\7\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow S(6/3/7)$

[Zwischenergebnis: S(6/3/7)

e: Unter welchem Winkel φ sieht ein Beobachter im Punkt S die Kante [AB] der Grundfläche?

Zu bestimmen ist der Winkel zwischen den Kanten (Geraden) SA und SB mit Skalarprodukt

$$\cos(\vartheta) = \frac{\begin{pmatrix}1\\2\\7\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}5\\-2\\5\end{pmatrix}}{\sqrt{1+4+49} \bullet \sqrt{25+4+25}} = \frac{5-4+35}{54} = \frac{36}{54} \mid\sim \cos^{-1}$$

$\Rightarrow \vartheta \approx 48{,}2^0$

f: Der Abstand zwischen S und der Grundfläche der Pyramide wird verdoppelt.

$$\vec{s} = \vec{m} + 2 \bullet \overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}8\\4\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\5\\11\end{pmatrix}$$

$$\cos(\vartheta) = \frac{\begin{pmatrix}5\\4\\11\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}9\\0\\9\end{pmatrix}}{\sqrt{25+16+121} \bullet \sqrt{81+0+81}} = \frac{45+0+99}{162} = \frac{144}{162} \mid\sim \cos^{-1}$$

$\Rightarrow \vartheta \approx 27{,}3^0$

[Zwischenergebnis: S'(10/5/11)]

Zeigen Sie durch Rechnung, dass sich der Winkel φ annähernd halbiert.

Viel Erfolg