1. Klausur aus der Mathematik am 13.12.2011
Klasse 11Qd Name: ....

Alle Ergebnisse sind mit Zwischenschritten nachvollziehbar darzustellen.

1. Zu untersuchen sind die folgenden 6 rationalen bzw. gebrochen rationalen Funktionen auf ihre grundlegenden Eigenschaften:

$a: f(x) = -3x^2 \frac{(x-2)(x+4)}{100+x^4}$ $b: \quad f(x) = -3x \frac{(x-2)^3(x+4)}{100-x^2}$

$c: f(x) = -3x^2 \frac{x+4}{100+x^2}$ $d: \quad f(x) = -3 \frac{(x-2)^2(x+4)}{100-x^2}$

$e: f(x) = -3 \frac{4x-8}{x^2(100+x^2)}$ $f: \quad f(x) = -3 \frac{4x^2+8}{x^2(100+x^2)}$

Geben Sie zu jeder Eigenschaft alle Funktionen mit dieser Eigenschaft durch Angabe des passenden Buchstabens an. **Es kann keinen, einen oder mehrere Treffer geben**.

$\lim_{n\to\pm\infty} f(x) = 0$ ……………………………………………

Nullstelle oVZW bei x = 0 ……………………………………………………………..

Nullstelle mVZW bei x = -4 ……………………………………………………………..

Nullstelle oVZW bei x = 2 ……………………………………………………………..

Polstelle oVZW bei x = 0 ……………………………………………………………..

Polstelle mVZW bei x = ± 10 ……………………………………………………………..

waagrechte Asymptote y = 0 ……………………………………………………………..

waagrechte Asymptote y = -3 …………………………………………………………….

schiefe Asymptote ……………………………………………………………..

zusätzliche Berechnungen:

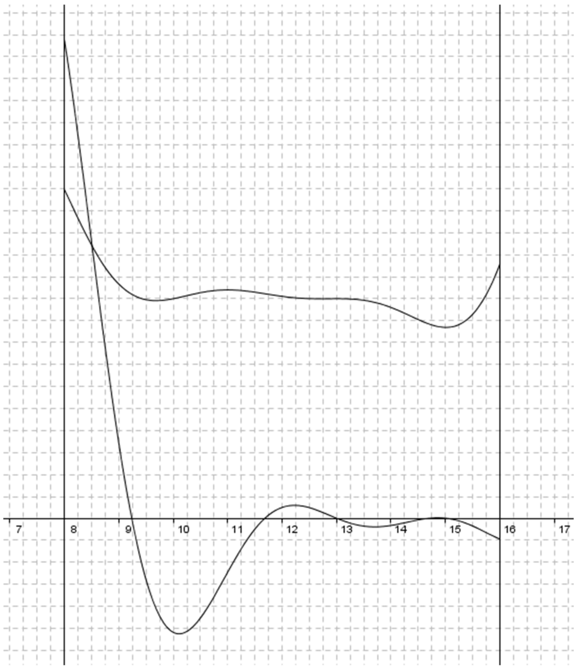
2. Die Kurve I zeigt den (geglätteten) Verlauf eines Kurstages an der Börse.
Ein Analyst vermutet, dass die Änderungsrate des Kurses der bilanzierten Menge der gehandelten Aktien entspricht – d. h. das der Kurs sich um so schneller ändert, je mehr Aktien gehandelt werden. Wenn mehr Aktien verkauft als gekauft werden, bekommt der bilanzierte Handel ein negatives Vorzeichen und wenn mehr Aktien gekauft als verkauft werden, dann wird der bilanzierte Handel positiv bewertet.

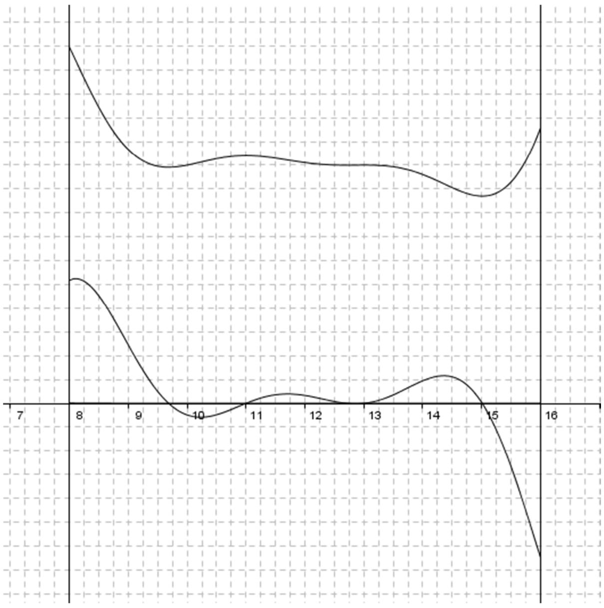
a: Bestimmen Sie grafisch die Änderungsrate des Aktienkurses zwischen 14:00 Uhr und 15:00 Uhr.

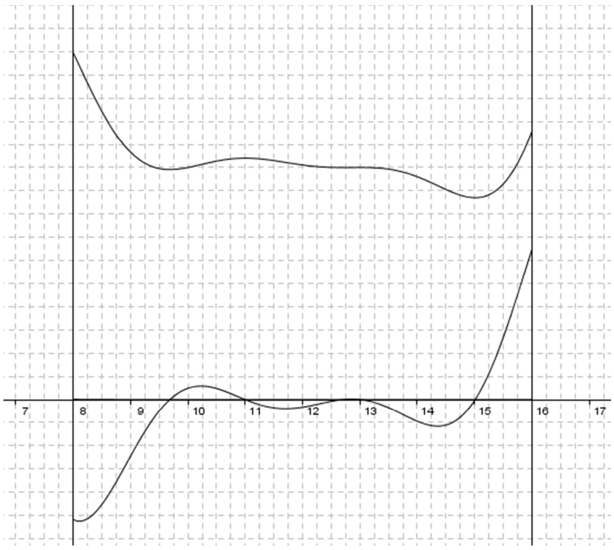
b: Gegen 9:30 Uhr werden genau so viele Aktien gekauft wie verkauft.
Erläutern Sie kurz, wie man diesen Sachverhalt aus der Kurve I heraus lesen kann.

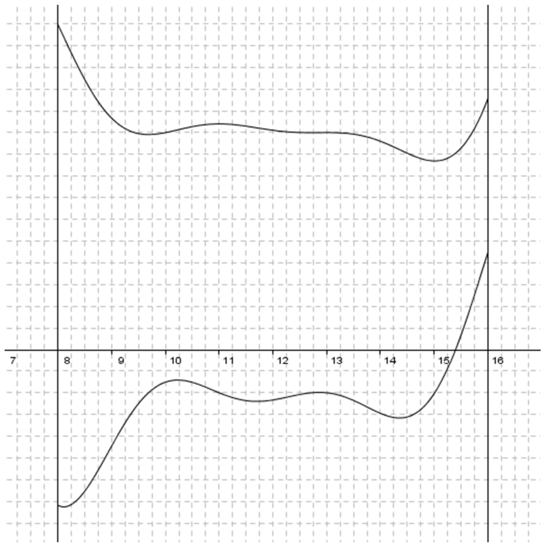
Die 4 Diagramme zeigen 4 mögliche Handelsbilanzkurven qualitativ. Nur eines davon zeigt den gewünschten Zusammenhang richtig.

c: Finden Sie das richtige Diagramm heraus, indem sie die 3 anderen mit jeweils einer zutreffenden Begründung ausschließen.









…. kann nicht zutreffen, da ……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………..

…. kann nicht zutreffen, da ……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………..

…. kann nicht zutreffen, da ……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………..

3. Bestimmen Sie jeweils die Ableitungsfunktionen f‘(x)!

a: $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 - 5 * \frac{1}{x^4}$

b: $f(x) = (x^2 - 3x)(\frac{1}{x} + 2)$

c: $f(x) = \frac{3x^4 - 2x^2}{x^2}$

d: $f(x) = \frac{-2x + x^2}{1 - x^2}$

4. Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x) = -2\ \frac{x^2}{x^2 + a^2}$ mit dem Parameter a $\in R$

a: Weisen Sie nach, dass alle Funktionen dieser Schar achsensymmetrisch zur y-Achse sind.

b: Weisen Sie nach, das die Ableitungsfunktion $f_a'(x)$ punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

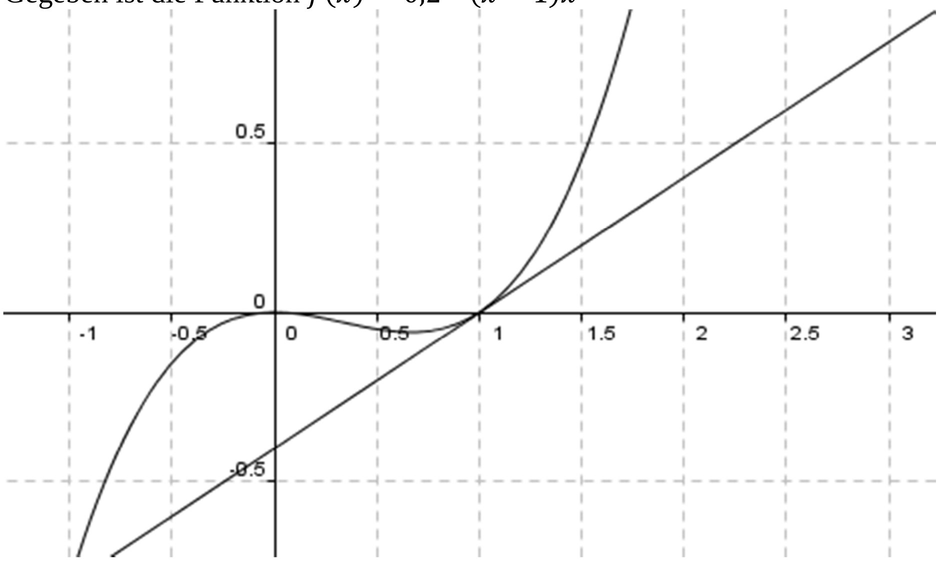
Nun sei a = 2.

c: Zur Bestimmung des Wendepunktes erhält man folgende Gleichung – **Herleitung nicht gefordert !**

$$4\text{-}3x^2 = 0$$

Bestimmen Sie die Lage der beiden Wendepunkte W_1 und W_2

5. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 0{,}2 * (x - 1)x^2$



a: Stellen Sie die Tangentengleichung im Punkt S(1/?) auf.

b: Berechnen Sie den Winkel α

c: Die Tangente schneidet aus den Koordinatenachsen ein Dreieck aus. Lässt man das Dreieck um die x-Achse rotieren, so entsteht ein Rotationskörper. Berechnen Sie das Volumen dieses Körpers in dm^3.

6. Gegeben ist die Ableitungsfunktion $f'(x) = -\frac{2\left((x-2)^2(x+5)\right)}{-4(x+2)^3}$

Erstellen Sie eine Vorzeichentabelle und bestimmen Sie die Monotoniebereiche.

Folgern Sie Art und Lage des Extremwertes.

Erläutern Sie kurz, warum bei x = -2 kein Extremwert vorliegt.

1. Klausur aus der Mathematik am 13.12.2011
Klasse 11Qd   Name: Lösungsvorschlag

Alle Ergebnisse sind mit Zwischenschritten nachvollziehbar darzustellen.

1. Zu untersuchen sind die folgenden 6 rationalen bzw. gebrochen rationalen Funktionen auf ihre grundlegenden Eigenschaften:

$$a: f(x) = -3x^2 \frac{(x-2)(x+4)}{100+x^4} \qquad b: \ f(x) = -3x \ \frac{(x-2)^3(x+4)}{100-x^2}$$

$$c: f(x) = -3x^2 \frac{x+4}{100+x^2} \qquad d: \ f(x) = -3\frac{(x-2)^2(x+4)}{100-x^2}$$

$$e: f(x) = -3\frac{4x-8}{x^2(100+x^2)} \qquad f: \ f(x) = -3\frac{4x^2+8}{x^2(100+x^2)}$$

Geben Sie zu jeder Eigenschaft alle Funktionen mit dieser Eigenschaft durch Angabe des passenden Buchstabens an. **Es kann keinen, einen oder mehrere Treffer geben**.

$\lim_{n\to\pm\infty} f(x) = 0$	e, f
Nullstelle oVZW bei x = 0	a
Nullstelle mVZW bei x = -4	b
Nullstelle oVZW bei x = 2	d
Polstelle oVZW bei x = 0	kein Treffer
Polstelle mVZW bei x = ± 10	b
waagrechte Asymptote y = 0	e, f
waagrechte Asymptote y = -3	a
schiefe Asymptote	c

zusätzliche Berechnungen:

2. Die Kurve I zeigt den (geglätteten) Verlauf eines Kurstages an der Börse.
Ein Analyst vermutet, dass die Änderungsrate des Kurses der bilanzierten Menge der gehandelten Aktien entspricht – d. h. das der Kurs sich um so schneller ändert, je mehr Aktien gehandelt werden. Wenn mehr Aktien verkauft als gekauft werden, bekommt der bilanzierte Handel ein negatives Vorzeichen und wenn mehr Aktien gekauft als verkauft werden, dann wird der bilanzierte Handel positiv bewertet.

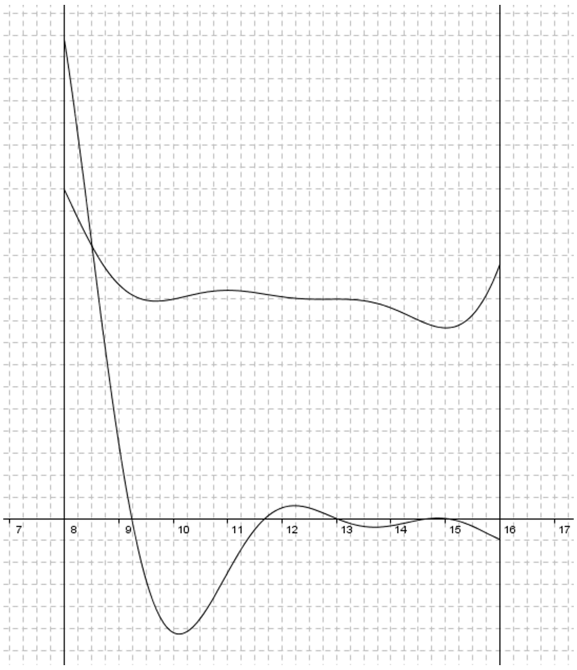
a: Bestimmen Sie grafisch die Änderungsrate des Aktienkurses zwischen 14:00 Uhr und 15:00 Uhr.
Funktionswerte aus Diagramm entnehmen: $y_{14} = 4800$, $y_{15} = 4300$
Änderungsrate $\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4800-4300}{(14-15)h} = -500\frac{1}{h}$

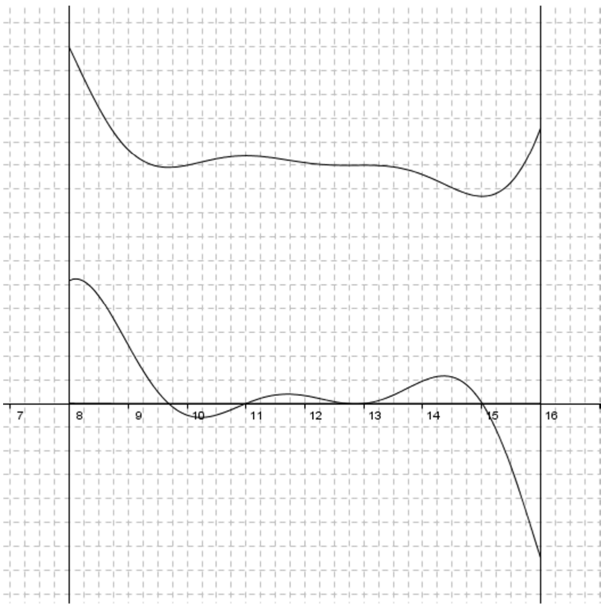
b: Gegen 9:30 Uhr werden genau so viele Aktien gekauft wie verkauft.
Erläutern Sie kurz, wie man diesen Sachverhalt aus der Kurve I heraus lesen kann.

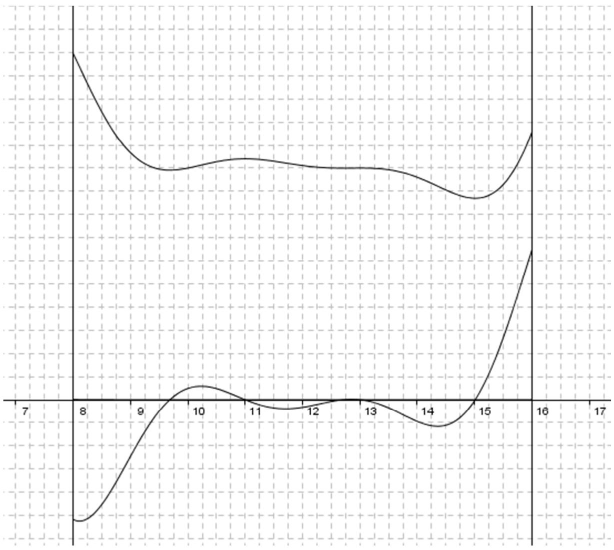
Der Aktienkurz bleibt konstant – die Tangente an die Kurve gegen 9:30 Uhr ist waagrecht

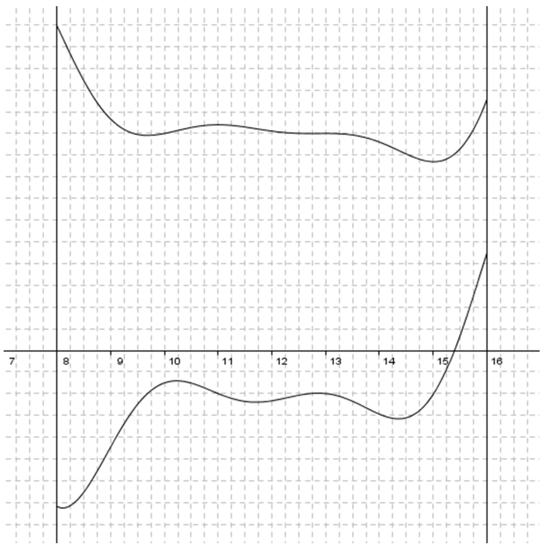
Die 4 Diagramme zeigen 4 mögliche Handelsbilanzkurven qualitativ. Nur eines davon zeigt den gewünschten Zusammenhang richtig.

c: Finden Sie das richtige Diagramm heraus, indem sie die 3 anderen mit jeweils einer zutreffenden Begründung ausschließen.









1 kann nicht zutreffen, da die Handelsbilanz zum Börsenstart negativ sein muss – der Kurs fällt

2 kann nicht zutreffen, da die Handelsbilanz zum Börsenstart negativ sein muss – der Kurs fällt

4 kann nicht zutreffen, da die Handelsbilanz gegen 9:30 Uhr eine Nullstelle besitzt

3. Bestimmen Sie jeweils die Ableitungsfunktionen f'(x)!

a: $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 - 5 * \frac{1}{x^4}$

$$f'(x) = -2x^2 - 5 * (-4) * x^{-5} = -2x^2 + 20 * \frac{1}{x^5}$$

b: $f(x) = (x^2 - 3x)\left(\frac{1}{x} + 2\right)$

$$f'(x) = (2x - 3)\left(\frac{1}{x} + 2\right) + (x^2 - 3x)\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$2 + 4x - 3 * \frac{1}{x} - 6 - 1 + 3 * \frac{1}{x} = 4x - 5$$

c: $f(x) = \frac{3x^4 - 2x^2}{x^2} = 3x^2 - 2 \ mit\ Auflösen\ der\ Differenz\ im\ Zähler$

$$f'(x) = 6x$$

d: $f(x) = \frac{-2x + x^2}{1 - x^2}$

$$f'(x) = \frac{[(-2 + 2x)(1 - x^2) - (-2x + x^2)(-2x)]}{(1 - x^2)^2} =$$

$$\frac{-2 + 2x^2 + 2x - 2x^3 - (4x^2 - 2x^3)}{(1 - x^2)^2} = \frac{-2x^2 + 2x - 2}{(1 - x^2)^2}$$

4. Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x) = -2\,\frac{x^2}{x^2 + a^2}$ mit dem Parameter a ∈ R

a: Weisen Sie nach, dass alle Funktionen dieser Schar achsensymmetrisch zur y-Achse sind.

$zu\ zeigen:\ f(x) = f(-x)$

$Beweis:\quad f(-x) = \left[-2\frac{(-x)^2}{(-x)^2 + a^2}\right] = -2\frac{x^2}{x^2 + a^2} = f(x)$ (w)

b: Weisen Sie nach, das die Ableitungsfunktion $f_a'(x)$ punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

$f_a'(x) = -2 * \frac{[2x*(x^2 + a^2) - x^2*(2x)]}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{4xa^2}{(x^2 + a^2)^2}$

$zu\ zeigen: f'^{(x)} = -f'^{(-x)}$

$Beweis:\ -f(-x) = -\frac{[4*(-x)*a^2]}{(-x)^2 + a^2} = \frac{4xa^2}{x^2 + a^2} = f(x)$ (w)

Nun sei a = 2.

c: Zur Bestimmung des Wendepunktes erhält man folgende Gleichung – **Herleitung nicht gefordert !**

$$4 - 3x^2 = 0$$

Bestimmen Sie die Lage der beiden Wendepunkte W_1 und W_2

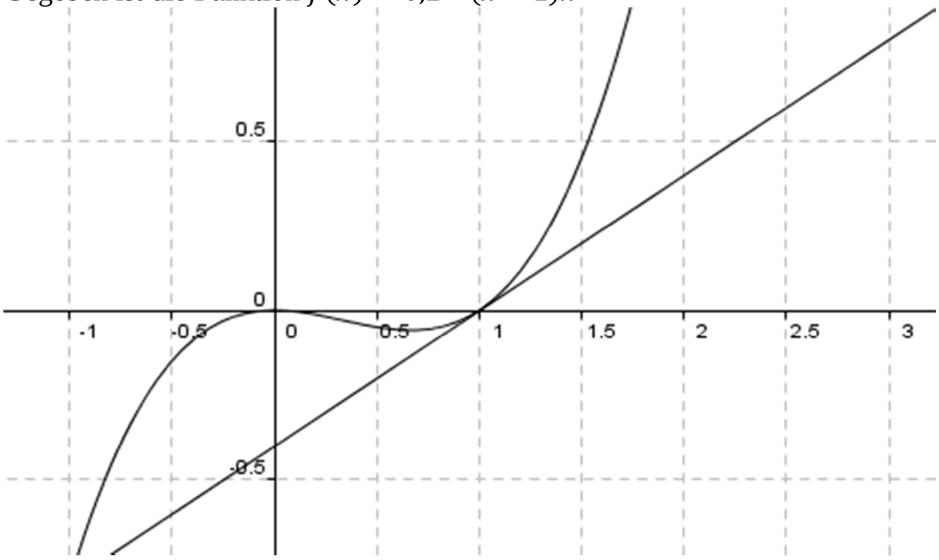
$4 = 3x^2 \mid * \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{4}{3} = x^2 \mid \sim \sqrt{\ } \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$

$y_1 = f\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = -2\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^2}{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 4} = -2\left(\frac{16}{25}\right) = \frac{-32}{25} = -1\frac{7}{25}$

$y_2 = f\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = -2\frac{\left(-\frac{4}{3}\right)^2}{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + 4} = -2\left(\frac{16}{25}\right) = \frac{-32}{25} = -1\frac{7}{25}\ oder\ Achsymmetrie$

$$W_1\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\ ;\ -1\frac{7}{25}\right)\ und\ W_2\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\ ;\ -1\frac{7}{25}\right)$$

5. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 0{,}2 * (x-1)x^2$



a: Stellen Sie die Tangentengleichung im Punkt S(1/?) auf.

$f'(x) = 0{,}2 * (3x^2 - 2x)$

$f'(1) = 0{,}2\,(3-2) = 0{,}2$

$t: y = f'(1)(x-1) + f(1) =$

$0{,}2 * (x-1) + 0 = 0{,}2 * x - 0{,}2$

b: Berechnen Sie den Winkel α

$\tan(\alpha) = f'(1) = 0{,}2 \mid \sim \tan^{-1}$

$\Rightarrow \alpha = \tan^{(-1)}(0{,}2) = 11{,}3^0$

c: Die Tangente schneidet aus den Koordinatenachsen ein Dreieck aus. Lässt man das Dreieck um die x-Achse rotieren, so entsteht ein Rotationskörper. Berechnen Sie das Volumen dieses Körpers in dm^3.

Annahme: Einheit in dm

$V = \frac{1}{3} G\,h = \frac{1}{3}(\pi r^2)h = \frac{1}{3}(\pi(0{,}2)^2)1 = 0{,}042\ [dm^3]$

6. Gegeben ist die Ableitungsfunktion $f'(x) = -\frac{2\left((x-2)^2(x+5)\right)}{-4(x+2)^3}$

Erstellen Sie eine Vorzeichentabelle und bestimmen Sie die Monotoniebereiche.
Folgern Sie Art und Lage des Extremwertes.
Erläutern Sie kurz, warum bei x = -2 kein Extremwert vorliegt.

mögliche VZW bei - 5, -2, 2

Faktor		-5		-2		2	
-2	-		-		-		-
$(x-2)^2$	+		+		+		+
(x+5)	-		+		+		+
-4	-		-		-		-
$(x+2)^3$	-		-		+		+
f‘	+		-		+		+
F	↗		↘		↗		↗

Extremwert: Tiefpunkt bei x = -5 TP(-5/???) d. h. y-Wert kann beliebig sein!
Bei x = -2 liegt eine Polstelle mit VZW vor – also kein Extremwert !