1. Klausur aus der Mathematik am 8.12.2009
Klasse 11Q3 Name: ....

Alle Funktionen werden in ihrem maximal möglichen Definitionsbereich über R betrachtet. Alle Zeichnungen müssen vollständig und ordentlich angelegt werden – alle Berechnungen sind mit Zwischenschritten nachvollziehbar darzustellen.

1. Zeichnung auf Beiblatt !

Gegeben ist die gebrochen rationale Funktion

$$f: \mapsto \frac{2x^2-8}{x^2-3x} = \frac{2(x-2)(x+2)}{x(x-3)}$$

Geben Sie die Nullstellen und Polstellen mit/ohne Vorzeichenwechsel an. **2 BE**

Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to 3\downarrow} f(x)$ **6 BE**

Zeichnen Sie den Graphen zu f unter Einbeziehung der bisher erarbeiteten Ergebnisse. **5 BE**

2. siehe Beiblatt !

I ☐ ja ☐ nein, da ....

....

II ☐ ja ☐ nein, da ....

....

III ☐ ja ☐ nein, da ....

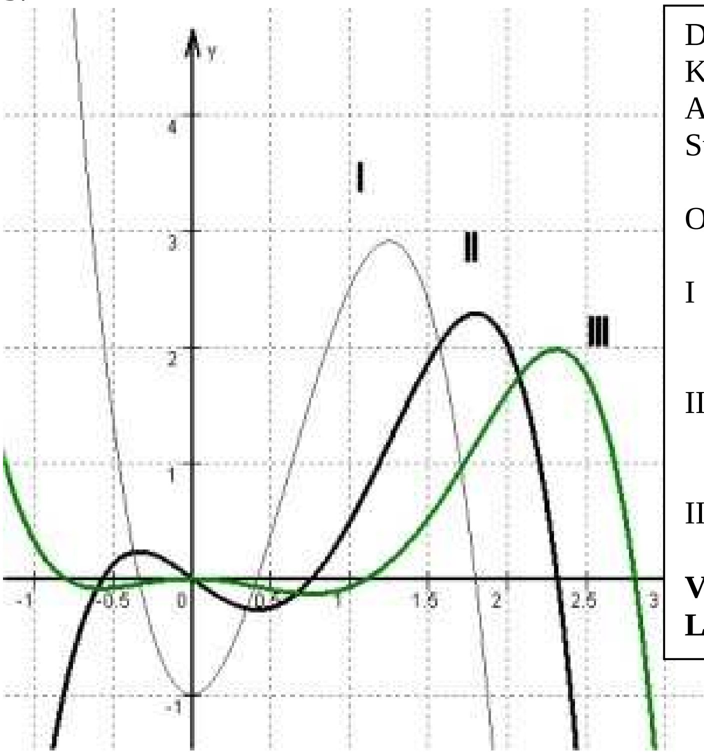
....

IV ☐ ja ☐ nein, da ....

....

8 BE

3.



Das nebenstehende Diagramm zeigt den Kurvenverlauf einer Funktion f, ihrer Ableitungsfunktion f' und ihrer Stammfunktion F.

Ordnen Sie zu !

I ....

II ....

III ....

Vorsicht ! Nur für eine komplett richtige Lösung erhält man Punkte ! 5 BE

4. Bestimmen Sie jeweils die Ableitungsfunktion f'(x) und fassen Sie weitestgehend zusammen.

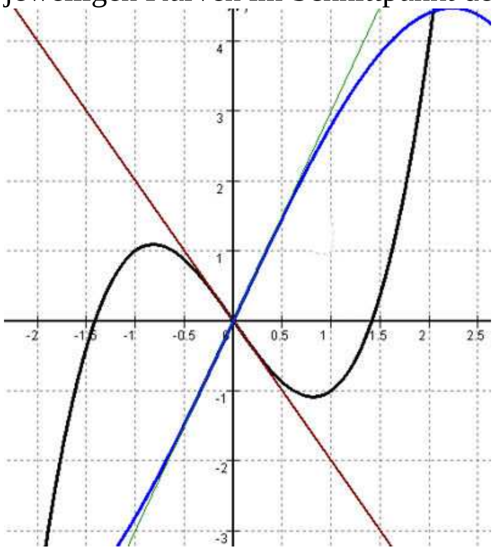
a: f(x) = $5 - x^{-2}$ **2 BE**

b: f(x) = $\frac{1}{2x^2 - 1}$ **3 BE**

c: f(x) = $(-\frac{3}{4}x^2 - 1)(x - \frac{1}{2}x^2)$ **4 BE**

d: f(x) = $\frac{2x-3}{x^2+x}$ **5 BE**

5. Die beiden Funktionsgraphen zu f mit f(x) = x^3-2x und g mit g(x) = -0,2x^3 +3x besitzen einen Schnittpunkt bei O(0/0).
Als Schnittwinkel zweier Kurven ist der spitze Winkel zwischen den Tangenten an die jeweiligen Kurven im Schnittpunkt definiert.



a:
Bestimmen Sie mit Hilfe der Ableitung jeweils den eingezeichneten Winkel, den die beiden Tangenten gegenüber der x – Achse bilden.
Welchen Schnittwinkel besitzen die beiden Kurven ?

7 BE

b: Die Kurve G_{fp} aus der Kurvenschar

G_{fp} : $G_{fp} : x \mapsto px(x-1) \quad p \in R$ soll mit der Geraden

g: y = -0,5x

im Ursprung einen 90^0 – Winkel bilden. Bestimmen Sie p !

6 BE

6. Die Funktion f: x |-> -0,5x^3 + 2,25x^2 – 1
besitzt 2 Extremwerte.
Stellen Sie die Ableitungsfunktion auf und untersuchen Sie f mit Hilfe einer Vorzeichentabelle zu **f'** auf Monotonie.
Bestimmen Sie Lage und Art der beiden Extremwerte.

7 BE

Summe: 60 BE

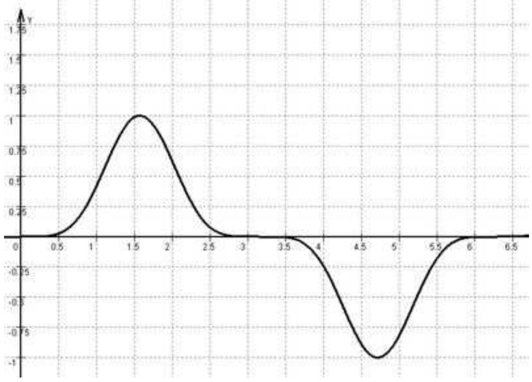
Viel Erfolg

1. Klausur aus der Mathematik am 8.12.2009

Klasse 11Q3 Beiblatt Name: ....

zu Aufgabe 1:

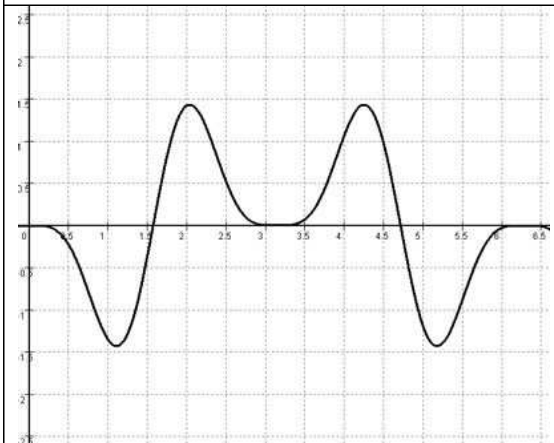
zu Aufgabe 2:

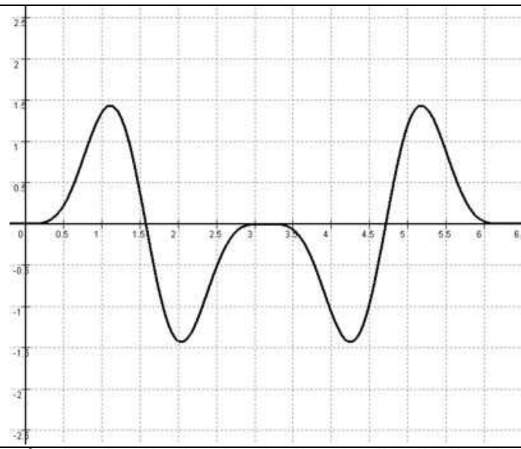


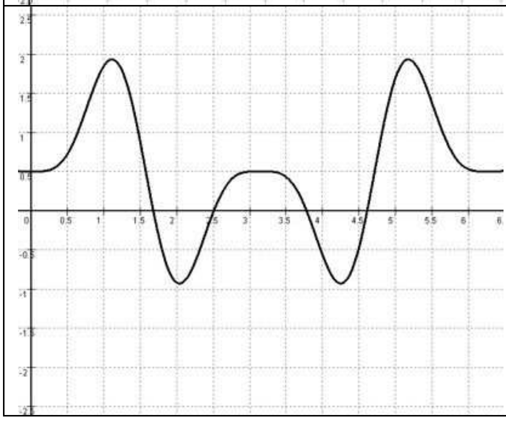
Das Diagramm links zeigt den Computerausdruck der Ist-Füllstandshöhe eines Wasservorratsbehältnisses gegenüber der Soll-Füllstandshöhe.

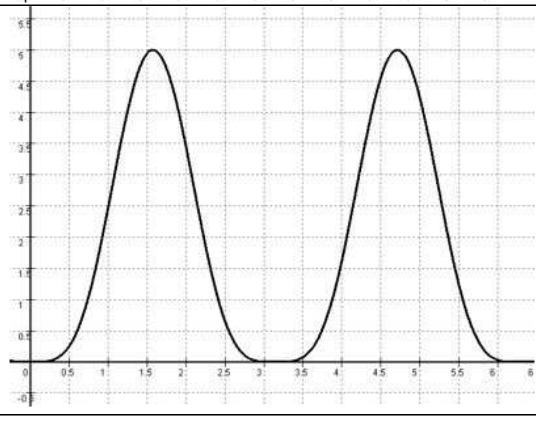
Untenstehend finden Sie 4 mögliche Pumpleistungsdiagramme.

Nennen Sie das passende Diagramm und finden Sie zu jedem ausgeschlossenen Diagramm jeweils ein Argument !









1. Klausur aus der Mathematik am 8.12.2009
Klasse 11Q3 Name: Lösungsvorschlag

Alle Funktionen werden in ihrem maximal möglichen Definitionsbereich über R betrachtet. Alle Zeichnungen müssen vollständig und ordentlich angelegt werden – alle Berechnungen sind mit Zwischenschritten nachvollziehbar darzustellen.

1. Zeichnung auf Beiblatt !

Gegeben ist die gebrochen rationale Funktion

$$f: \mapsto \frac{2x^2-8}{x^2-3x} = \frac{2(x-2)(x+2)}{x(x-3)}$$

Geben Sie die Nullstellen und Polstellen mit/ohne Vorzeichenwechsel an.
N = { +2; -2 } ohne VZW, P = { 0; 3 } ohne VZW **2 BE**
Berechnen Sie

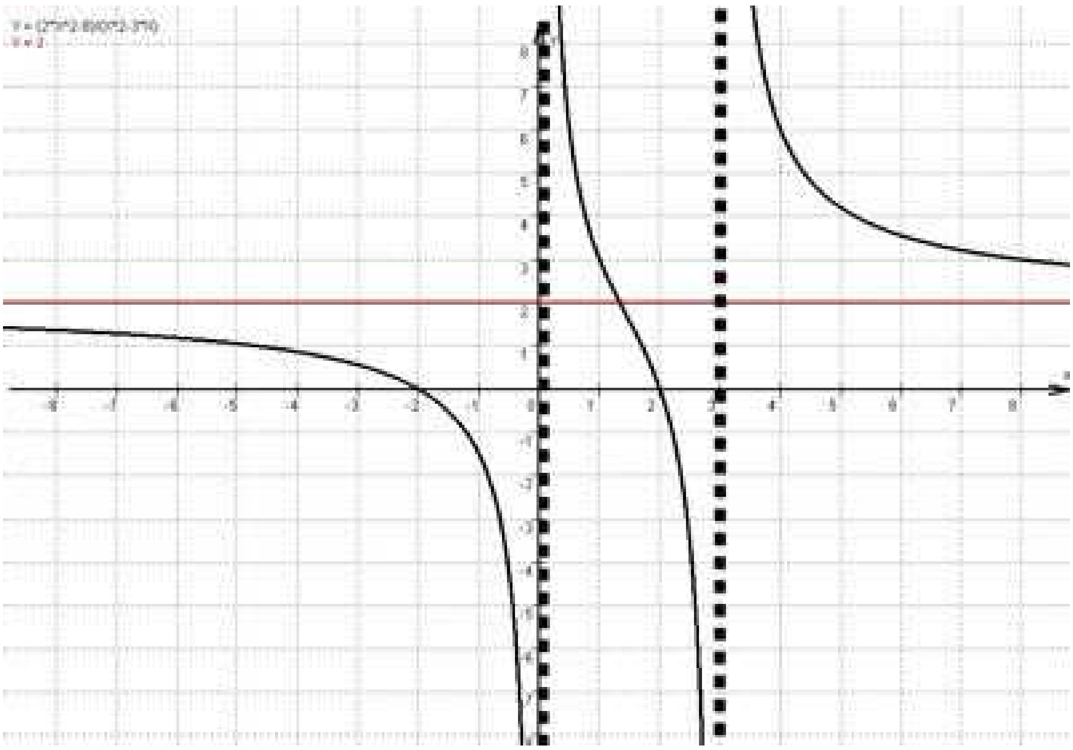
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(2-\frac{4}{x^2})}{x^2(1-\frac{3}{x})} = 2, \textit{ d.h. waagrechte Asymptote}$$ und

$$\lim_{x\to 3\downarrow} f(x) = \lim_{h\to 0\downarrow} \frac{2(3+h)^2-4}{(3+h)^2-3(3+h)} = \lim_{h\to 0\downarrow} \frac{2(9+6h+h^2)-4}{(9+6h+h^2)-9-3h} =$$

6 BE

$$\lim_{h\to 0\downarrow} \frac{18+12h+2h^2-4}{3h+h^2} = +\infty$$

Zeichnen Sie den Graphen zu f unter Einbeziehung der bisher erarbeiteten Ergebnisse.



5 BE

2. siehe Beiblatt !

I ☐ ja ■ nein, da Steigung direkt zu Anfang positiv werden muss

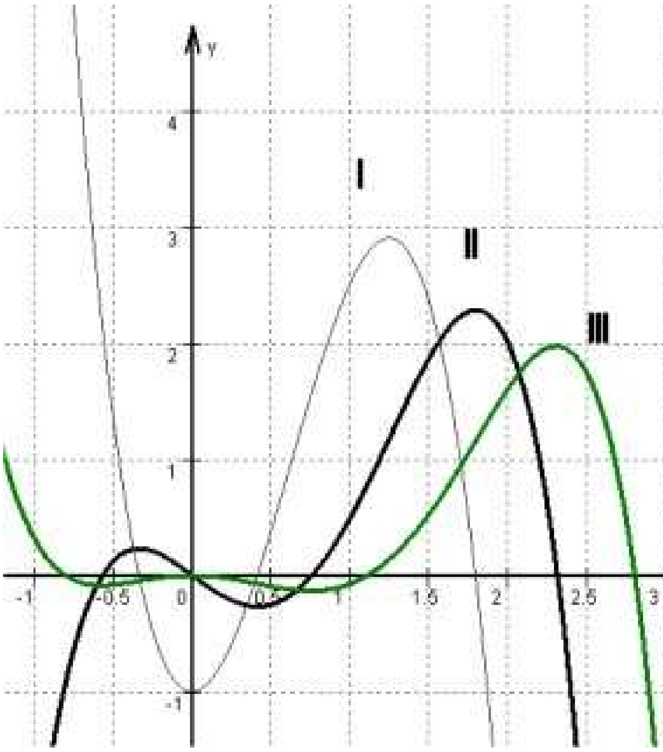
II ■ ja ☐ nein, da ....

III ☐ ja ■ nein, da Steigung direkt zu Anfang 0 sein muss

IV ☐ ja ■ nein, da Steigung nach dem ersten Maximum bei x = 1,6 wieder negativ werden muss

8 BE

3.



Das nebenstehende Diagramm zeigt den Kurvenverlauf einer Funktion f, ihrer Ableitungsfunktion f' und ihrer Stammfunktion F.

Ordnen Sie zu !

I **$G_{f'}$**

II **G_f**

III **G_F**

Vorsicht ! Nur für eine komplett richtige Lösung erhält man Punkte ! **5 BE**

4. Bestimmen Sie jeweils die Ableitungsfunktion f'(x) und fassen Sie weitestgehend zusammen.

a: f(x) = $5-x^{-2}$ f'(x) = $2x^{-3}$ **2 BE**

b: f(x) = $\frac{1}{2x^2-1}$ f'(x)= $-\frac{4x}{(2x^2-1)^2}$ **3 BE**

c: f(x) = $(-\frac{3}{4}x^2-1)(x-\frac{1}{2}x^2)$

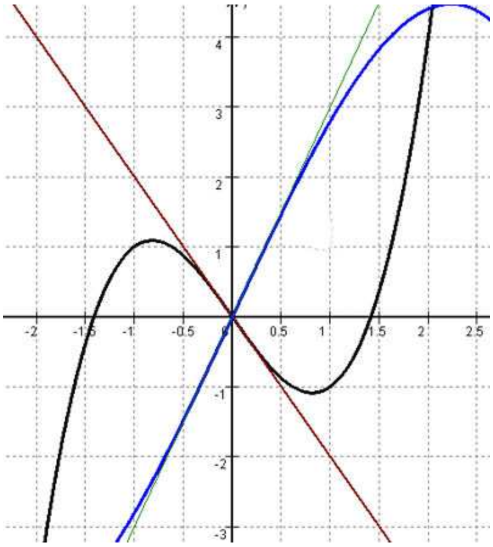
f'(x) = $(-\frac{3}{2}x)(x-\frac{1}{2}x^2)+(-\frac{3}{4}x^2-1)(1-x)=\frac{3}{2}x^3-\frac{9}{4}x^2+x-1$

4 BE

d: f(x) = $\frac{2x-3}{x^2+x}$

f'(x) = $\frac{2(x^2+x)-(2x-3)(2x+1)}{(x^2+x)^2}=\frac{-2x^2+6x+3}{(x^2+x)^2}$ **5 BE**

5. Die beiden Funktionsgraphen zu f mit f(x) = x^3-2x und g mit g(x) = -0,2x^3 +3x besitzen einen Schnittpunkt bei O(0/0).
Als Schnittwinkel zweier Kurven ist der spitze Winkel zwischen den Tangenten an die jeweiligen Kurven im Schnittpunkt definiert.



a:
Bestimmen Sie mit Hilfe der Ableitung jeweils den eingezeichneten Winkel, den die beiden Tangenten gegenüber der x – Achse bilden.
Welchen Schnittwinkel besitzen die beiden Kurven ?

$f'(x) = 3x^2-2 \Rightarrow f'(0) = -2$
$\Rightarrow \tan(\alpha) = -2 \mid \sim \tan^{-1} \Rightarrow \alpha \approx (-)63{,}4^0$

$g'(x) = -0{,}6x+3 \Rightarrow g'(0) = 3$
$\Rightarrow \tan(\beta) = 3 \mid \sim \tan^{-1} \Rightarrow \beta \approx 71{,}6^0$
Für den Schnittwinkel ergibt sich damit:
$180^0 - 63{,}4^0 - 71{,}6^0 = 45^0$

7 BE

b: Die Kurve G_{fp} aus der Kurvenschar

G_{fp} : $G_{fp} : x \mapsto px(x-1) \quad p \in R$ soll mit der Geraden

g: $y = -0{,}5x$

im Ursprung einen 90^0 – Winkel bilden. Bestimmen Sie p !

$m_g = -0{,}5 \Rightarrow f'(0) = 2$
mit $f'(x) = 2px - p$ gilt: $f'(0) = -p \Rightarrow p = -2$

6 BE

6. Die Funktion f: $x \mapsto -0{,}5x^3 + 2{,}25x^2 - 1$
besitzt 2 Extremwerte.
Stellen Sie die Ableitungsfunktion auf und untersuchen Sie f mit Hilfe einer Vorzeichentabelle zu **f’** auf Monotonie.
Bestimmen Sie Lage und Art der beiden Extremwerte.

$f'(x) = -1{,}5x^2 + 4{,}5x = -1{,}5x(x-3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 3$

		0	3
-1,5	-	-	-
x	-	+	+
x-3	-	-	+
f’	-	+	-
f	↘	↗	↘

Minimum	Maximum
P(0/-1)	Q(3/5,75)

7 BE

Summe: **60 BE**