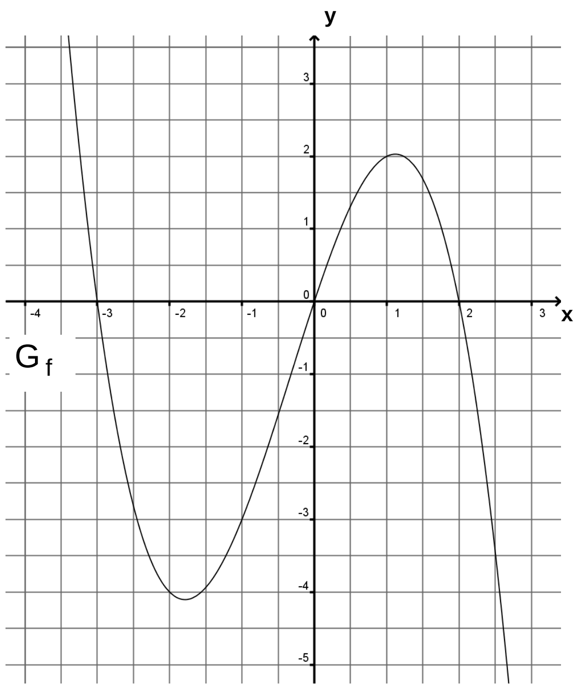
RKG 2013/14 **Q11 __**

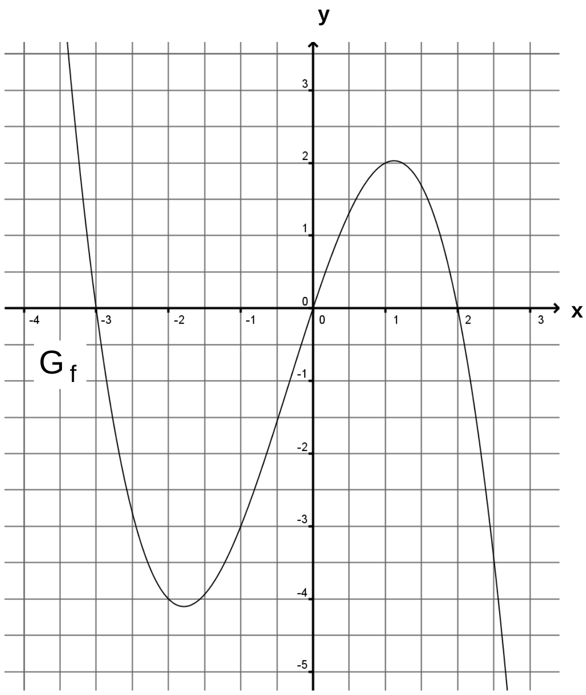
1. Schulaufgabe aus der Mathematik am 17.12.2013

Name:________________________________

1.0 Bestimmen Sie die 1. Ableitungsfunktion von f bzw. eine zu f' gehörige Stammfunktion:

a) $f(x) = x^3\left(x^2 + 1\right)$ **b)** $f'(x) = 6x^2 + 4x - 1{,}5$





2.0 Gegeben ist in obigen Abbildungen der Graph G_f ein und derselben Funktion f.

2.1 Zeichnen Sie die Sekante ein, die folgendem Differenzenquotienten entspricht:

$$\frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = +1 \quad \text{(links)}$$

2.2 Grafische Lösung! Für welche Stelle(n) x_0 gilt: $f'(x_0) = +1$? (links)

2.3 Bestimmen Sie ebenfalls im Rahmen der Zeichengenauigkeit (rechts): $f'(0)$

2.4 Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f' in der Abbildung (rechts).

3.0 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2\sqrt{x} - \frac{1}{x}$ in ihrer maximalen Definitionsmenge D_{max}.

3.1 Bestimmen Sie D_{max} und ermitteln Sie die 1. Ableitung der Funktion f.

3.2 Untersuchen Sie, ob im Punkt $P(1|f(1))$ die Tangente an den Graphen G_f der Funktion f parallel zur Geraden g mit der Gleichung $y = 3{,}5x + 10$ ist. (<u>Begründung!</u>)

4.0 Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 1}$, $D_f = IR \setminus \{-1\}$.

4.1 Berechnen Sie die Schnittpunkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen.

4.2 Bestimmen Sie Art und Gleichungen aller Asymptoten des Graphen von f.

4.3 Wie verhält sich f(x) an den Rändern des Definitionsbereichs?

4.4 Ermitteln Sie das Monotonieverhalten der Funktion und geben Sie Art und Lage der Extrempunkte an.

[ZWERG: $f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$]

4.5 Skizzieren Sie den Graphen G_f mithilfe aller bisher ermittelten Ergebnisse.

5.0 Gegeben sind die Graphen zweier Funktionen, wobei ein Graph mit einer durchgezogenen Linie gezeichnet ist und der zweite Graph mit einer gestrichelten Linie.

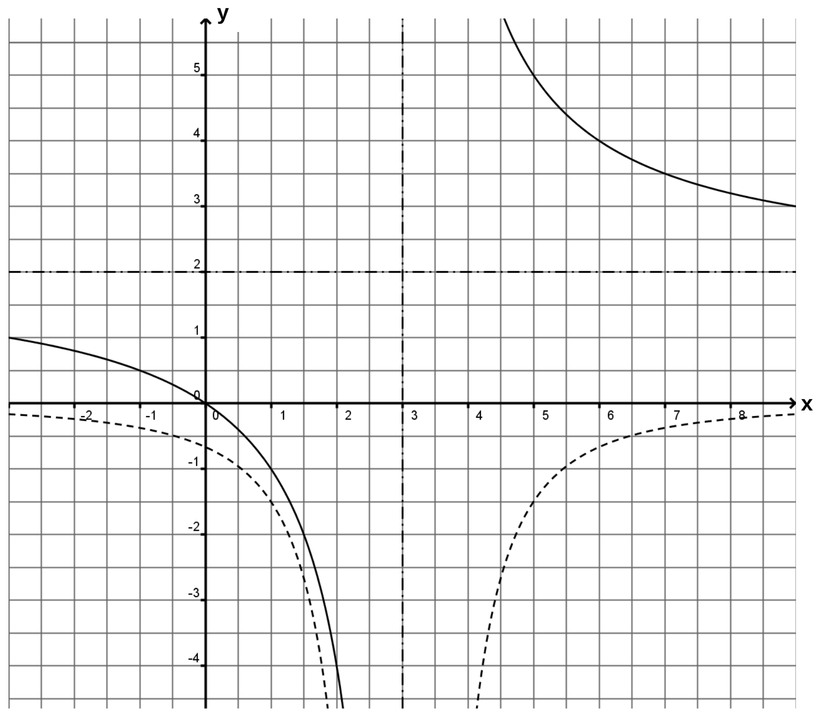
5.1 Entscheiden Sie, welcher Graph die Funktion f und welcher Graph die Ableitungsfunktion f' darstellt. Begründen Sie Ihre Aussage.

5.2 Geben Sie im Rahmen der Zeichengenauigkeit die Steigung des Graphen G_f im Punkt P(6|f(6)) an.

5.3 Bestimmen Sie (→ **mit Begründung**) einen möglichen Funktionsterm für die Funktion f.

[Mögliches Zwischenergebnis: $f(x) = 2 + \frac{6}{x-3}$

5.4 Ermitteln Sie im Punkt P(6|f(6)) jeweils die Gleichung der Tangente und Normale an den Graphen der Funktion f.



6. Von den Winkelfunktionen ist als Grundwissen bekannt:

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Folgende Ableitungen werden vorgegeben (→ kein Nachweis erforderlich!)

$g(x) = \sin(x) \Rightarrow g'(x) = \cos(x)$ $h(x) = \cos(x) \Rightarrow h'(x) = -\sin(x)$

Zeigen Sie, dass für $f(x) = \tan(x)$ gilt: $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

VIEL ERFOLG!!! Sz

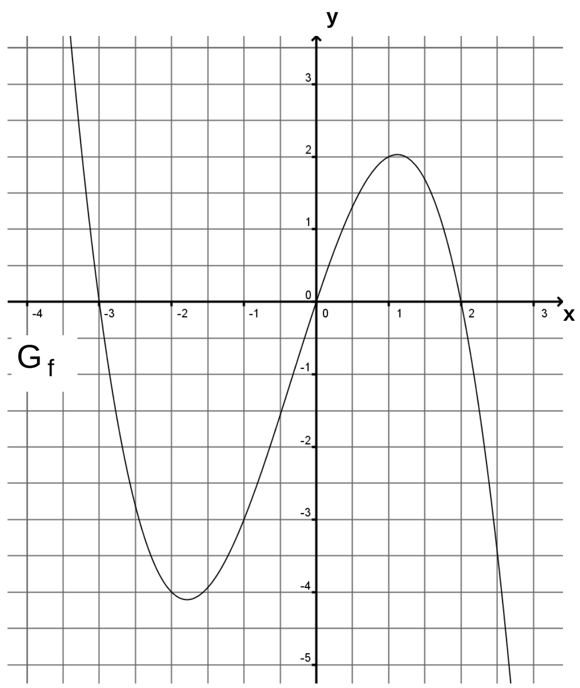
Lösungsvorschlag

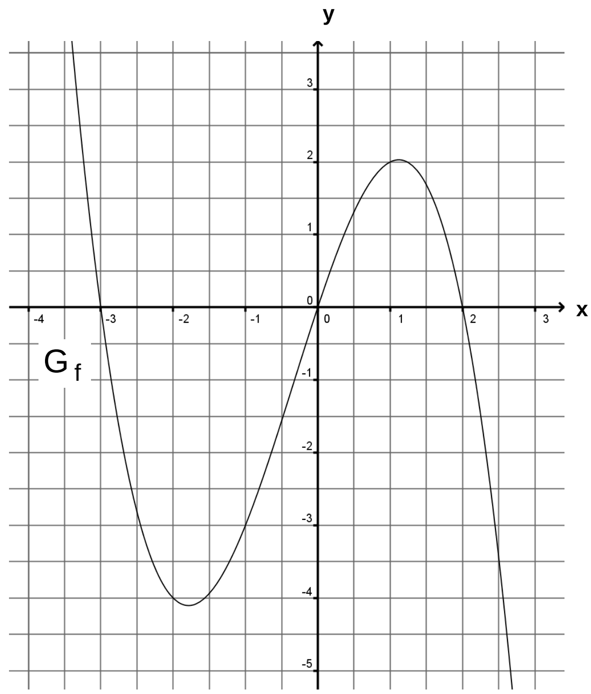
1.0 Bestimmen Sie die 1. Ableitungsfunktion von f bzw. eine zu f' gehörige Stammfunktion:

a) $f(x) = x^3\left(x^2 + 1\right)$ **b)** $f'(x) = 6x^2 + 4x - 1{,}5$

$a: f'(x) = 3x^2(x^2+1) + x^3(2x) = 3x^4 + 3x^2 + 2x^4 = 5x^4 + 3x^2$ *oder mit* $f(x) = x^5 + x^3$

$b: f(x) = 6 * \frac{x^3}{3} + 4 * \frac{x^2}{2} - 1{,}5x\ (+C)$





2.0 Gegeben ist in obigen Abbildungen der Graph G_f ein und derselben Funktion f.

2.1 Zeichnen Sie die Sekante ein, die folgendem Differenzenquotienten entspricht:

$\frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = +1$ (links)

2.2 Grafische Lösung! Für welche Stelle(n) x_0 gilt: $f'(x_0) = +1$? (links)

2.3 Bestimmen Sie ebenfalls im Rahmen der Zeichengenauigkeit (rechts): $f'(0)$

2.4 Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f' in der Abbildung (rechts).

2.1. Sekante: P(-1/-1), Steigung: 1

2.2 2 Parallelen zur Sekante

2.3 Tangente an Q(0/0) mit $m_t = 3$

2.3 $G_{f'}$ *Parabel nach unten geöffnet mit 2 Nullstellen*

3.0 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2\sqrt{x} - \frac{1}{x}$ in ihrer maximalen Definitionsmenge D_{max}.

3.1 Bestimmen Sie D_{max} und ermitteln Sie die 1. Ableitung der Funktion f.

$D_{max} = R\{0\}\quad f'(x) = 2x\sqrt{x} + x^2 * \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$

3.2 Untersuchen Sie, ob im Punkt P(1|f(1)) die Tangente an den Graphen G_f der Funktion f parallel zur Geraden g mit der Gleichung $y = 3{,}5x + 10$ ist. (<u>Begründung!</u>)

$f'(1) = 2 + \frac{1}{2} + 1 = 3{,}5 = m_g$ *d.h. t und g sind parallel*

4.0 Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto \frac{x^2+4x+4}{x+1}$, $D_f = IR \setminus \{-1\}$.

4.1 Berechnen Sie die Schnittpunkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen.

$f(0) = \frac{4}{1} = 4 \quad S(0/4)$ *ist Schnittpunkt mit* $y -$ *Achse*

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow$ *doppelte Nullstelle* $x_1 = -2$ (*keine Nullstelle im Nenner!*) $S_x(-2/0)$ *ist Schnittpunkt mit* $x -$ *Achse*

4.2 Bestimmen Sie Art und Gleichungen aller Asymptoten des Graphen von f.

senkrechte Asymptote $x = -1$ (*Polstelle*)
$ZG = NG + 1$ *d.h. schiefe Asymptote mit Polynomdivision* $y = x + 3$

4.3 Wie verhält sich f(x) an den Rändern des Definitionsbereichs?

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ *Polstelle mit VZW rechts von der einzigen Nullstelle*
$\lim_{x \to -1+0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -1-0} f(x) = -\infty$

4.4 Ermitteln Sie das Monotonieverhalten der Funktion und geben Sie Art und Lage der Extrempunkte an.

VZT von f'(x) mit

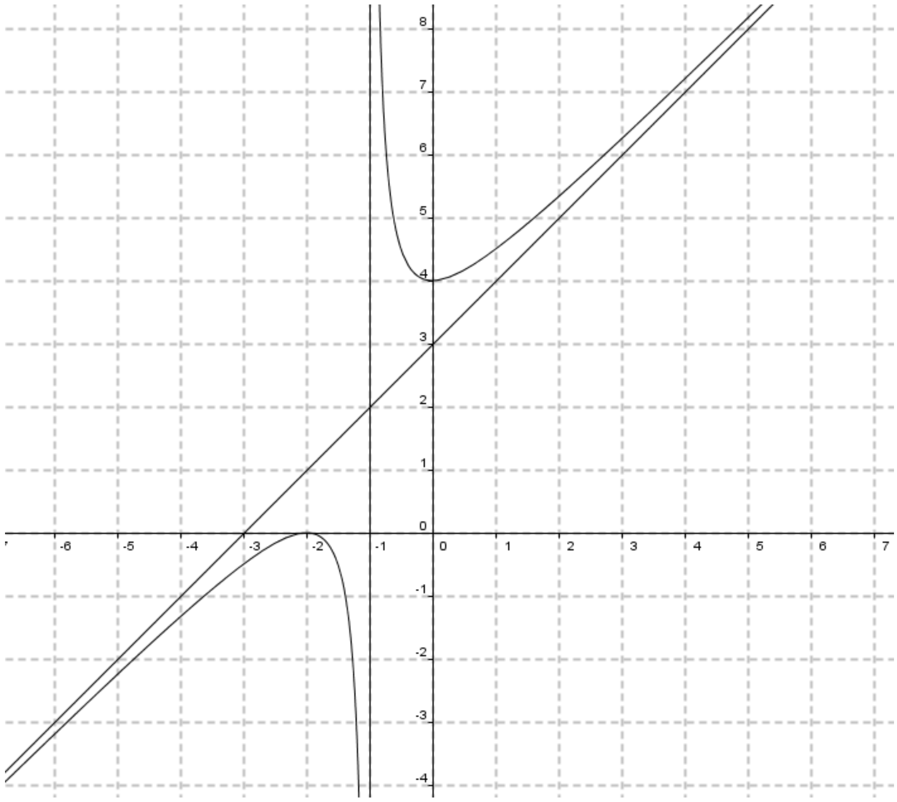
$f'(x) = \frac{(2x+4)(x+1)-(x^2+4x+4)*1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+2x+4x+4-x^2-4x-4}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = -2 \vee x_2 = 0$

VZT von f', Wechsel bei den Nullstellen und der Polstelle möglich

		-2		-1		0	
x	-		-		-		+
x+2	-		+		+		+
(x+1)^2	+		+		+		+
f'(x)	+		-		-		+
f(x)	↗		↘		↘		↗
		HP		P		TP	

HP(-2/0) und TP(0/4)

4.5 Skizzieren Sie den Graphen G_f mithilfe aller bisher ermittelten Ergebnisse.



.0 **5.0** Gegeben sind die Graphen zweier Funktionen, wobei ein Graph mit einer durchgezogenen Linie gezeichnet ist und der zweite Graph mit einer gestrichelten Linie.

5.1 Entscheiden Sie, welcher Graph die Funktion f und welcher Graph die Ableitungsfunktion f′ darstellt. Begründen Sie Ihre Aussage.

Zuordnung f – durchgezogen, f' - gestrichelt
Begründung:
waagrechte Asymptote y=2 erzeugt waagrechte Asymptote y = 0 in der Ableitung und nicht umgekehrt

5.2 Geben Sie im Rahmen der Zeichengenauigkeit die Steigung des Graphen G_f im Punkt P(6|f(6)) an.

m = -0,6 aus eingezeichneter Tangente oder ablesen des Funktionswertes von f' bei x = 6 exakt (5.4) m = - 0,666…

5.3 Bestimmen Sie (→ **mit Begründung**) einen möglichen Funktionsterm für die Funktion f .

Ursprungsfunktion $f(x) = a * \frac{1}{x}$ $z.Bsp. mit\ P(6/4)\ also\ x = 3, y = 2\ \ gilt\ a = 6$

Verschiebung um 3 in x-Richtung, um 2 in y-Richtung ergibt den angegebenen Term

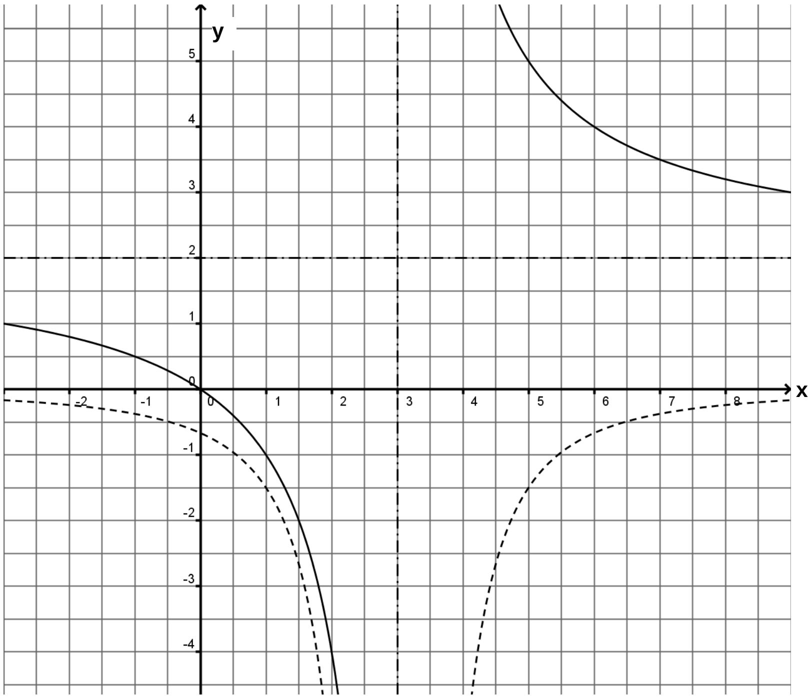
Ansatz mit

$f(x) = a * \frac{1}{x-3} + 2$ $mit\ Begründung\ Polstelle\ und\ waagrechte\ Asymptote$

5.4 Ermitteln Sie im Punkt P(6|f(6)) jeweils die Gleichung der Tangente und Normale an den Graphen der Funktion f .

$$f'(x) = -6 * \frac{1}{(x-3)^2} \quad mit\ x = 6\ gilt\ f'(3) = -6 * \frac{1}{9} = -\frac{2}{3} = m_t \Rightarrow m_n = \frac{3}{2}$$

$$t:\ y = -\frac{2}{3}(x-6) + 4 \qquad n:\ y = \frac{3}{2}(x-6) + 4$$



6. Von den Winkelfunktionen ist als Grundwissen bekannt:

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Folgende Ableitungen werden vorgegeben (→ kein Nachweis erforderlich!)

$g(x) = \sin(x) \Rightarrow g'(x) = \cos(x)$ $h(x) = \cos(x) \Rightarrow h'(x) = -\sin(x)$

Zeigen Sie, dass für $f(x) = \tan(x)$ gilt: $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

$$f'(x) = \frac{\cos(x) * \cos(x) - \sin(x) * (-\sin(x))}{(\cos(x))^2} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$