4. Extemporale aus der Mathematik am 6.3.2012, 1Qd Lösungsvorschlag

1. Gegeben sind die 3 Punkte A(-1/2/5), B(4/-2/-2) und C(5/-2/a) mit a ∈ R

a: Bestimmen Sie a so, dass das Dreieck ABC bei C einen rechten Winkel besitzt.

$$\bar{C}A = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ a-5 \end{pmatrix} \ und\ \bar{C}B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ a+2 \end{pmatrix}$$

$$Bedingung:\ \bar{C}A * \bar{C}B = 0 \Leftrightarrow 6 + (a-5)(a+2) = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$6 + a^2 - 3a - 10 = 0 \ \Leftrightarrow a^2 - 3a - 4 = 0 \ \Rightarrow a_1 = -1\ oder\ a_2 = 4$$

[Zwischenergebnis: $a_1 = -1 \vee a_2 = 4$]

Im Folgenden sei a = -1 und damit $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ $und\ \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

b: Bestimmen Sie mit Hilfe eines Gleichungssystems (Wahl: $n_2 = 1$) einen

Vektor $\vec{n}$ (Normalenvektor), der auf den beiden
Vektoren $\overrightarrow{CA}\ und\ \overrightarrow{CB}\ \ senkrecht\ steht\ und\ überprüfen\ Sie\ ihr\ Ergebnis$

$mit\ Hilfe\ des\ Vektorproduktes\ (\ Kreuzproduktes\ ): \overrightarrow{V1} = \overrightarrow{CA}\ X\ \overrightarrow{CB}$

$Geben\ Sie\ eine\ Interpretation\ der\ unterschiedlichen\ Ergebnisse.$

1. mit Gleichungssystem

I $-6n_1 + 6n_3 = 0$

II $0 = 0$

III $-n_1 - n_3 = 0$

I + 6*III $-12n_1 = 0 \ \Rightarrow n_1 = 0\ und\ damit\ auch:\ n_2 = 0\ \ also\ \bar{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. mit Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -[6+6] \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Interpretation: beide Vektoren stehen senkrecht, sind aber unterschiedlich lang.

Der zweite Normalenvektor gibt gleichzeitig den Flächeninhalt des Rechtecks mit 12 FE an.

c: Geben Sie die Fläche des Dreiecks mit Hilfe des Ergebnisses aus b an.

Fläche des Dreiecks: 6 FE – Hälfte des Rechtecks

d: Ergänzen Sie das Dreieck ABC zu einem Rechteck ABCD und geben Sie die Fläche des Rechtecks an.
[Zwischenergebnis: D(-2/-2/4]

$$\vec{d} = \ \vec{a} + \bar{C}B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Fläche Rechteck: siehe b - 12 FE

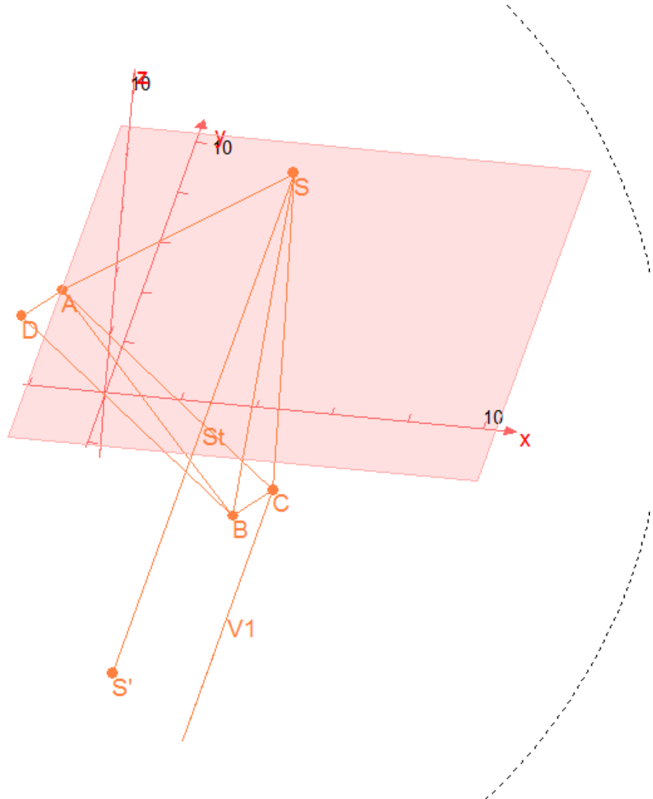
e: Der Punkt S(-3/8/1) ergänzt das Dreieck ABC zu einer Pyramide.
Berechnen Sie das Volumen der Pyramide mit Hilfe des Spatproduktes.
[Zwischenergebnis: V = 20 [VE]]

$$V = |\frac{1}{6}\ \overrightarrow{CS} * (\overrightarrow{CA}\ X\ \overrightarrow{CB}\ )\ | = \quad |\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1\\10\\2\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}0\\-12\\0\end{pmatrix}| = |\frac{1}{6} * (-120)| = 20$$

f: Aus den Ergebnissen aus c und e lässt sich die Höhe h der Pyramide bestimmen.
Leiten Sie her: h = 10 [LE]

mit $V = \frac{1}{3}G*h$ gilt: $h = 3\frac{V}{G} = \frac{60}{6} = 10$

g: Die Zeichnung zeigt die Pyramide, den Punkt S, den Vektor $\overrightarrow{CA}\ X\ \overrightarrow{CB}$ als Vektor $\overrightarrow{V1}$ und den Spiegelpunkt S‘ des Punktes S am Dreieck ABC.



Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten des Punktes S‘.

Der Vektor $\bar{V}_1$ aus b zeigt in die richtige Richtung und kann deshalb verwendet werden:

$$\bar{s}' = \vec{s} + 2 * 10 * \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-12\\1\end{pmatrix}$$