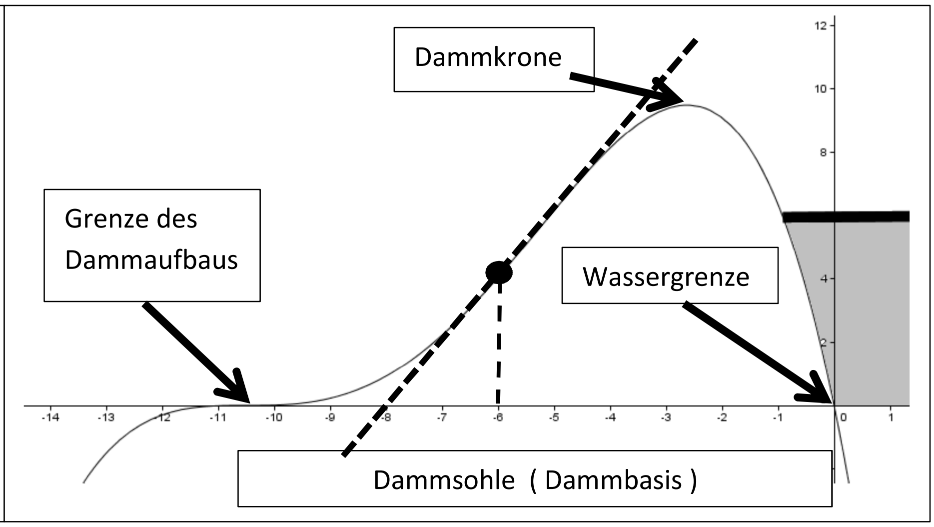
Beispielaufgabe zur Klausur 12/2, Analysis

Ein Hochwasserdamm wird mit der Funktion $f\colon\ x \mapsto -\frac{1}{40}x\left(\frac{2}{3}\,x+7\right)^3$ laut Skizze modelliert.

Das Wasser
(grau eingezeichnet)
steht bei einem
normalen
Hochwasser auf
h = 6,0 m.



a: Der Dammaufbau beginnt ca. 10 m hinter der Wassergrenze.
Berechnen Sie den exakten Wert.

b: Die Dammkrone bezeichnet den Extremwert der Funktion im Bereich zwischen Wassergrenze und Grenze des Dammaufbaus.

Bestimmen Sie das Monotonieverhalten der Funktion f im Bereich -12 < x < 1 und klären Sie damit:

* für x = - 10,5 liegt ein Terrassenpunkt vor (Begründung!)

* die Dammkrone liegt bei x = -2,625

[Zwischenergebnis: $f'(x) = -\frac{1}{40}\ (\left(\frac{2}{3}x+7\right)^2\ \left[\frac{2}{3}x+7+2x\right]$]

c: Für ein Jahrhunderthochwasser muss die Deichkrone 3,75 m über dem normalen Hochwasser liegen. Klären Sie durch Rechnung, ob es sich um einen Jahrhundertdamm handelt.

d: Auf dem Damm soll 2 m vom Beginn des Dammaufbaues weg in Richtung Dammkrone Bäume angepflanzt werden. Die Steigung der Böschung darf dann den Wert 60% nicht übersteigen.

Klären Sie durch Rechnung, ob diese Bedingung hier erfüllt ist.

e: Eine Variante des Architektenbüros sieht einen tangentialen Verlauf der wasserabseitigen Böschung ab einer Entfernung von 6 m von der Wassergrenze vor.

Stellen Sie die Tangentengleichung auf und klären Sie durch Rechnung, um wie viel Prozent sich die Dammsohle (Dammbasis) damit verkürzen würde.

Lösungsvorschlag

a: Gesucht ist die Nullstelle außer $x_0 = 0$.

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}x+7\right)^3 = 0 \Rightarrow \frac{2}{3}x+7=0 \Rightarrow x = -\frac{21}{2} = -10{,}5 \quad [m]$$

b: Die Dammkrone bezeichnet den Extremwert der Funktion im Bereich zwischen Wassergrenze und Grenze des Dammaufbaus.

Bestimmen Sie das Monotonieverhalten der Funktion f im Bereich -12 < x < 1 und klären Sie damit:

Produktregel mit Kettenregel für den 2. Faktor – also zuerst die Ableitung des 2 Faktors einzeln bestimmen:

$$h(x) = \left(\frac{2}{3}x+7\right)^3 = z^3 \; mit \; z = \frac{2}{3}x+7 \quad \Rightarrow \quad z' = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow h'(x) = 3z^2 * z' = 3 * \left(\frac{2}{3}x+7\right)^2 * \frac{2}{3} \; = 2\left(\frac{2}{3}x+7\right)^2$$

Dann gilt für f:

$$f'(x) = u' * v + u * v' = -\frac{1}{40} * \left[1 * \left(\frac{2}{3}x+7\right)^3 + x * 2\left(\frac{2}{3}x+7\right)^2\right]$$

$$= -\frac{1}{40}\left(\frac{2}{3}x+7\right)^2 \left[\left(\frac{2}{3}x+7\right)+2x\right] = -\frac{1}{40}\left(\frac{2}{3}x+7\right)^2 \left[\frac{8}{3}x+7\right]$$

Monotonieverhalten mit Vorzeichentabelle von f'(x):

Nullstellen für $x_0 = -10{,}5 \vee x_1 = -\frac{21}{8} = 2\frac{5}{8} = -2{,}625$

VZT von f', Wechsel bei den Nullstellen (und den Polstellen) möglich					
		-10,5		**-2,625**	
-1/40	-		-		-
(2/3 x + 7)^2	+		+		+
(8/3 x + 7)	-		-		+
f'(x)	+		+		-
f(x)	↗		↗		↘
		TP		**HP**	

* für x = - 10,5 liegt ein Terrassenpunkt vor (Begründung!)

f'(x) besitzt bei x = -10,5 eine doppelte Nullstelle (Nullstelle oVZW), d. h. dort liegt ein Terrassenpunkt vor

* die Dammkrone liegt bei x = -2,625

Hochpunkt wird als Dammkrone bezeichnet.

[Zwischenergebnis: $f'(x) = -\frac{1}{40}\,(\left(\frac{2}{3}x+7\right)^2\,\left[\frac{2}{3}x+7+2x\right]$]

c: Für ein Jahrhunderthochwasser muss die Deichkrone 3,75 m über dem normalen Hochwasser liegen. Klären Sie durch Rechnung, ob es sich um einen Jahrhundertdamm handelt.

Gesucht ist der y-Wert des Hochpunktes: f(-2,625) = 9,49 [m].
Der Damm erfüllt die Anforderungen nicht: 6 m + 3,75 m = 9,75 m > 9,49 m

d: Auf dem Damm soll 2 m vom Beginn des Dammaufbaues weg in Richtung Dammkrone Bäume angepflanzt werden. Die Steigung der Böschung darf dann den Wert 60% nicht übersteigen.

Gesucht ist die Steigung der Kurve für x = -8,5
f'(-8,5) = 0,70 = 70 % d. h. die Böschung ist zu steil.
Zusatzfrage: Unter welchem Winkel steigt die Böschung an dieser Stelle an?
$m_t = \tan(\gamma\,) = 0{,}70\,|\sim\tan^{-1} \quad \Rightarrow \quad \gamma\; = 34^0$ Vorsicht: Winkeleinheit DEG beachten!!

e: Eine Variante des Architektenbüros sieht einen tangentialen Verlauf der wasserabseitigen Böschung ab einer Entfernung von 6 m von der Wassergrenze vor.

Stellen Sie die Tangentengleichung auf und klären Sie durch Rechnung, um wie viel Prozent sich die Dammsohle (Dammbasis) damit verkürzen würde.

Gesucht ist die Tangentengleichung für x = - 6

mit f'(-6) = 2,025 und f(-6) = 4,05 gilt:

t: $y = f'(x_0) * (x - x_0) + y_0 = 2{,}025 * \left(x - (-6)\right) + \; 1{,}35 = 2{,}025x + 16{,}2$

Die Länge der Dammsohle wird jetzt angegeben durch die Nullstelle der Tangente:

Bed: $t(x) = 0 \Leftrightarrow \quad 2{,}025x + 16{,}2 = 0 \Leftrightarrow \quad x = -\frac{16{,}2}{2{,}025} = -8$

Verkürzung der Dammsohle in Prozent: $\frac{\Delta s}{L} = \frac{10{,}5-8}{10{,}5} = \frac{2{,}5}{10{,}5} = 0{,}24 = 24\%$