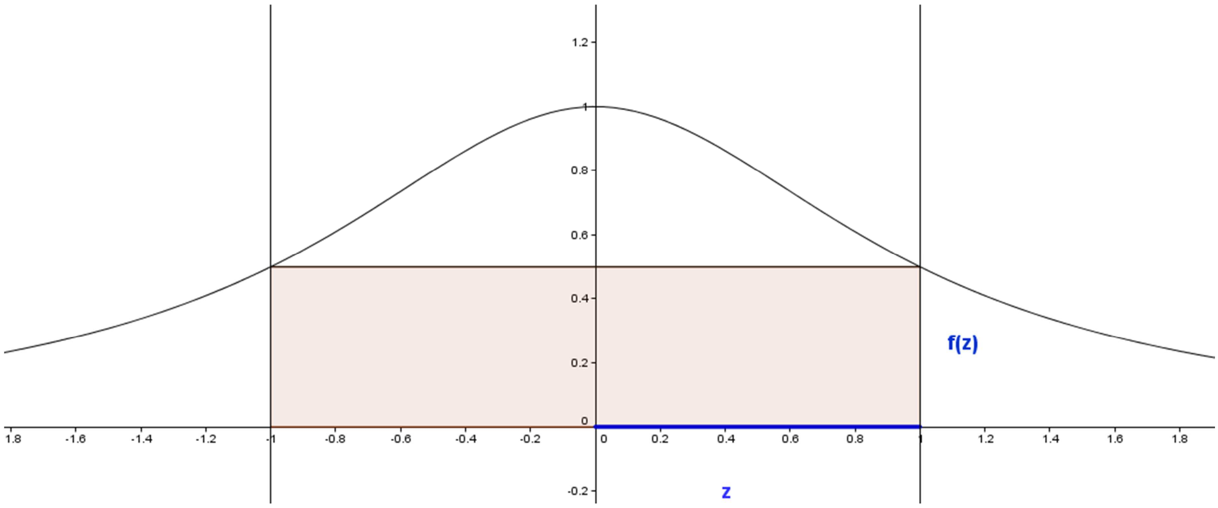
B. S. 199/16

a: $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ $mit\ den\ grundlegenden - schnell\ zu\ findenden\ Eigenschaften:$

1. $Achsensymmetrisch\ zur\ y - Achse:\ \ f(-z) = f(z)$
2. $waagrechte\ Asymptote\ \ y = 0, da\ \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0\ \ wegen\ Nennergrad > Zählergrad$
3. $Maximum\ bei\ x =\ 0,$
   $da\ der\ Zähler\ konstant\ ist\ und\ dann\ der\ Nenner\ (\ vom\ Betrag\ her\ ) minimal\ wird$
4. $Sowohl\ Nenner\ als\ auch\ Zähler\ des\ Quotienten\ sind\ immer\ positiv:\ W = R^+$



$A(z) = 2 * z * f(z) = 2\frac{z}{z^2+1}$

$Bed.:\ \ A'(z) = 0\ \ \ Extremwert\ !$

$A'(z) = 2 * \frac{1*(z^2+1)-z*2z}{(z^2+1)^2} = 2 * \frac{1-2z^2}{(z^2+1)^2} = 0$

$\Leftrightarrow\ \ 1 - 2z^2 = 0 \Leftrightarrow z^2 = \frac{1}{2}\ \Leftrightarrow\ \ z =\ \pm\sqrt{2}$

wichtig: zur Erzielung der vollen Punktzahl muss auch begründet werden, dass es sich tatsächlich um ein Maximum handelt – das ist bei Aufgaben dieser Art oft leicht durch Bachtung der Randbedingungen zu erreichen:

Es gilt

1. A(0) = 0, A(z) > 0 $\forall$ z ≥ 0 und A(z) ⟶ 0 für z ⟶ ∝
2. Nur eine Nullstelle in der auf R^+ stetigen und diffbaren Funktion f

1. und 2.: daraus folgt Maximum!

Ebenso möglich: VZW in f‘

nicht anzuraten: Ermitteln von f‘‘ und einsetzen der beiden gefundenen Werte

b: Variation durch Betrachtung des Volumens statt der Fläche

V(z) = $2z * \pi * [f(z)]^2 = 2\pi\frac{z}{(z^2+1)^2}$

$V'(z) = 2\pi\frac{1*(z^2+1)^2-z*(z^2+1)*2z}{(z^2+1)^4} = 2\pi(z^2+1)\frac{z^2+1-2z^2}{(z^2+1)^2}\ = 0$

$\Leftrightarrow 1 - z^2 = 0 \Leftrightarrow z =\ \pm 1$

c: Variation mit der Funktion f(x) = $\frac{1}{1+x^4}$

liefert folgende Ergebnisse: zu a $x_{\frac{1}{2}} = \pm\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$

zu b $x_{\frac{1}{2}} = \pm\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$

weitere mögliche Variationen:

- f(x) = 1 – x^2
- f(x) = e^{1-x^2}