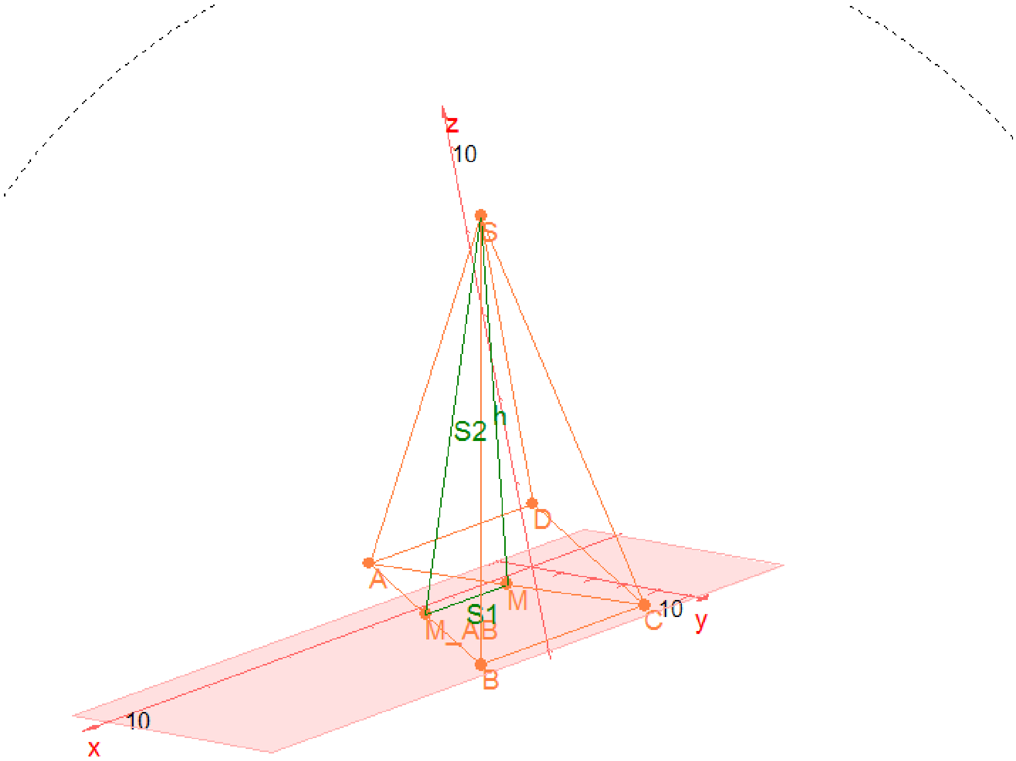
Analytische Geometrie

B.S. 124/36



b: Nachweis der rechten Winkel

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} und\ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad parallel\ zur\ x_1 - Achse\ !!$$

Dann gilt: $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow Beh.$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC}\ \ und\ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{BC}\ \ d.h. das\ Viereck\ ist\ ein\ Parallelogramm.$$

$$Dann\ genügt\ 1\ rechter\ Winkel, um\ zu\ folgern:$$

$das\ Parallelogramm\ ist\ ein\ Rechteck$

$-könnte\ aber\ auch\ noch\ ein\ spezielles\ Rechteck - nämlich\ ein\ Quadrat\ sein!$

Nachweis der ungleich langen Seiten durch Nachrechnen der Streckenlängen:

$$\overline{AB} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}\ aber\ \ \overline{AD} = \sqrt{16} = 4 \Rightarrow Beh.$$

c: zu zeigen: $\overline{AS} = \overline{BS} = \overline{CS} = \overline{DS}$

Hilft nichts, muss man auf unserem Stand der Dinge nachrechnen:

$\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{AS} = \sqrt{104}\,;$ $\quad \overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{BS} = \sqrt{104}\,;$

$\overrightarrow{CS} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{CS} = \sqrt{104}\,;$ $\quad \overrightarrow{DS} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{DS} = \sqrt{104}\,;$

d: Oberflächeninhalt

Zu berechnen sind 3 Flächeninhalten:

- Rechteck mit Erg. aus a A = 4*$\sqrt{40}$
- Vorderdreieck – bezogen auf Zeichnung

  $M_{[AB]} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

  und damit erhält man für die Höhe h des Vorderdreiecks:

  $h = \sqrt{4+9+81} = \sqrt{94}\ aus\ \overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

  also wieder mit dem Erg. aus a: A = $\frac{1}{2}gh = \frac{1}{2} * \sqrt{40} * \sqrt{94}$
- Seitendreieck – bezogen auf Zeichnung

  $M_{[AD]} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

  und damit erhält man für die Höhe h des Vorderdreiecks:

  $h = \sqrt{36+64} = 10\ aus\ \overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$

  also wieder mit dem Erg. aus a: A = $\frac{1}{2}gh = \frac{1}{2} * 4 * 10 = 20$

Damit erhält man für die Gesamtoberfläche:

O = $4 * \sqrt{40} + 2 * \frac{1}{2} * \sqrt{40} * \sqrt{94} + 2 * \frac{1}{2} * 4 * 10 = 126{,}6 \quad [FE]$

Volumeninhalt – das ist jetzt einfach – verwende Skalarprodukt oder elementare Geometrie, um die erforderliche Raumhöhe h auszurechnen:

1. Spatprodukt

   V =

   $2 * \frac{1}{6} * \left|\overrightarrow{AS} * \left(\overrightarrow{AB}\ X\ \overrightarrow{AD}\right)\right| = \frac{1}{3}\left|\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} * \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right| = \frac{1}{3}\left|\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} * \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -[0-8] \\ 24 \end{pmatrix}\right)\right| =$

   $\frac{1}{3} * (\,48 + 192\,) = \frac{1}{3} * 240 = 80 \quad [VE]$

2. elementar aus der oben bestimmten Höhe des Vorderdreiecks und der ebenfalls bekannten Streckenlängen des Rechtecks – siehe grünes Hilfsdreieck (rechtwinklig!)

$$h = \sqrt{94 - 2^2} = \sqrt{90}$$

und damit erhält man das Volumen aus

$$V = \frac{1}{3} Gh = \frac{1}{3} * 4 * \sqrt{40} * \sqrt{90} = 80 \quad [VE]$$

e: r des Kreiskegels – halbe Diagonalenlänge im Rechteck oder

$\overline{MA}$ *mit* $M(1;1;0)$ *aus* $M_{[AB]}$ *verschoben um* 2 *gegen die positive* $x-$*Achse*

$\Rightarrow r = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$ *und damit erhält man für das Kegelvolumen*:

$$V = \frac{1}{3} Gh = \frac{1}{3} r^2 \pi h = \frac{1}{3} * 14 * \pi * \sqrt{90} = 14\sqrt{10}\,\pi$$

Der gesuchte Anteil wird nun einfach als Quotient angesetzt:

$$k = \frac{80}{14\sqrt{10}\pi} = 0{,}575 = 57{,}5\%$$