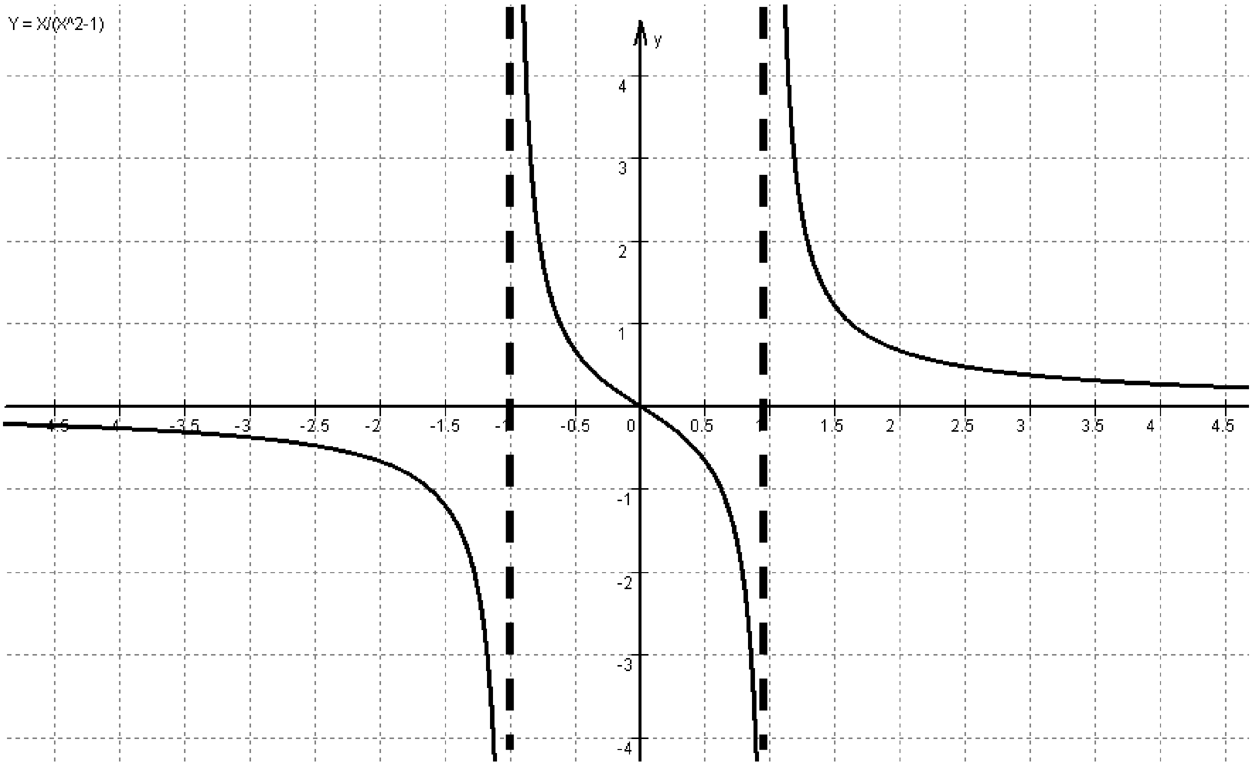
S. 22/1

a: $f(x) = \frac{x}{x^2-1} = \frac{x}{(x-1)(x+1)}$ D=R\{+1;-1}

N={0} P={+1;-1} jeweils alle Vielfachheit 1, d. h. mit VZW

Nennergrad > Zählergrad, d. h. waagrechte Asymptote y = 0

da $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x(x-\frac{1}{x})} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x-\frac{1}{x}} = \pm 0$



c: $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{x^3}{(x-1)(x+1)}$ D=R\{+1;-1}

N={0} P={+1;-1} jeweils alle ungerade Vielfachheit 3 bzw. 1, d. h. mit VZW

Nennergrad < Zählergrad, d. h.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2(1-\frac{1}{x^2})} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{1-\frac{1}{x^2}} = \pm\infty$$

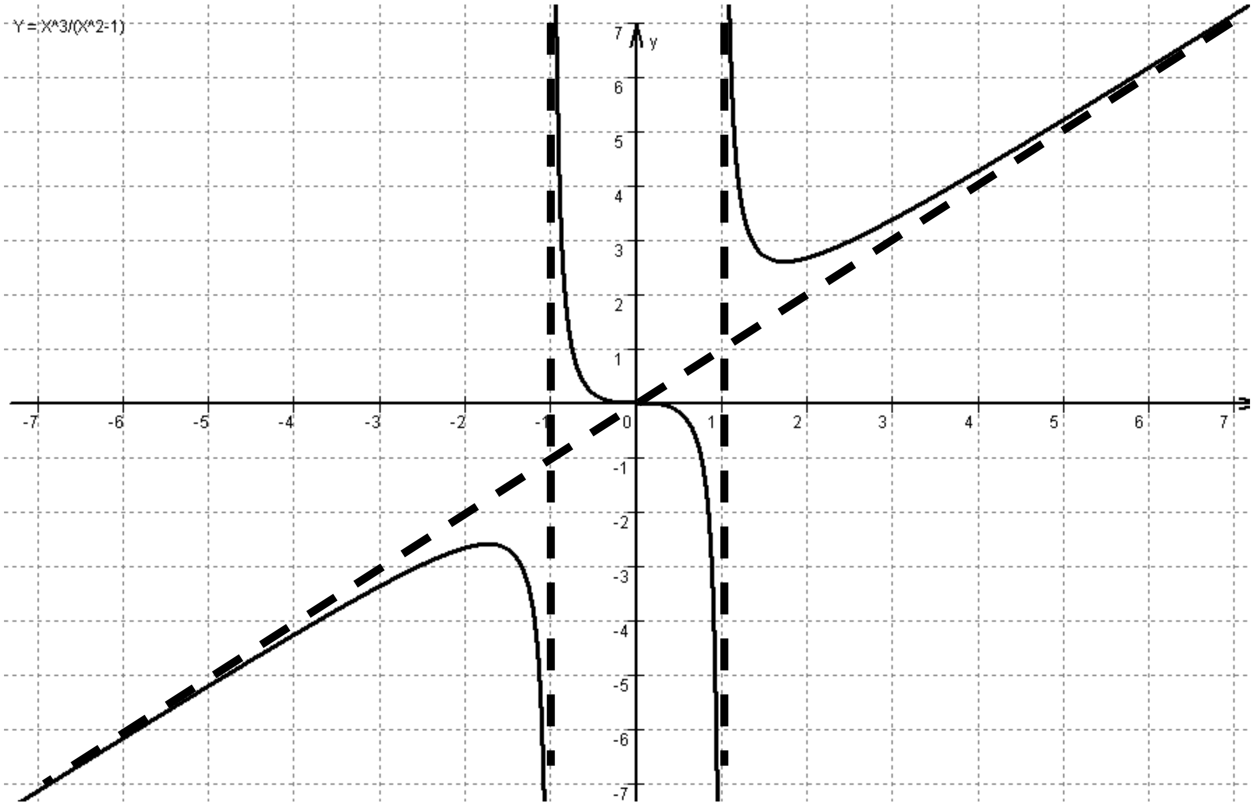
Spezialfall: Zählergrad = Nennergrad + 1

weiter mit Polynomdivision bzw. algebraischer Ergänzung

$$x^3 : (x^2-1) = x + \frac{x}{x^2-1} \quad bzw.$$

$$\frac{x^3}{x^2-1} = \frac{x^3-x+x}{x^2-1} = \frac{x^3-x}{x^2-1} + \frac{x}{x^2-1} = \frac{x(x^2-1)}{x^2-1} + \frac{x}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1}$$

schiefe Asymptote (lineares Näherungspolynom !) y = x



e: $f(x)=\frac{x}{1-x}$ D=R\{+1}

N={0} P={+1} jeweils Vielfachheit 1, d. h. mit VZW

Nennergrad = Zählergrad, d. h. waagrechte Asymptote y = -1, da

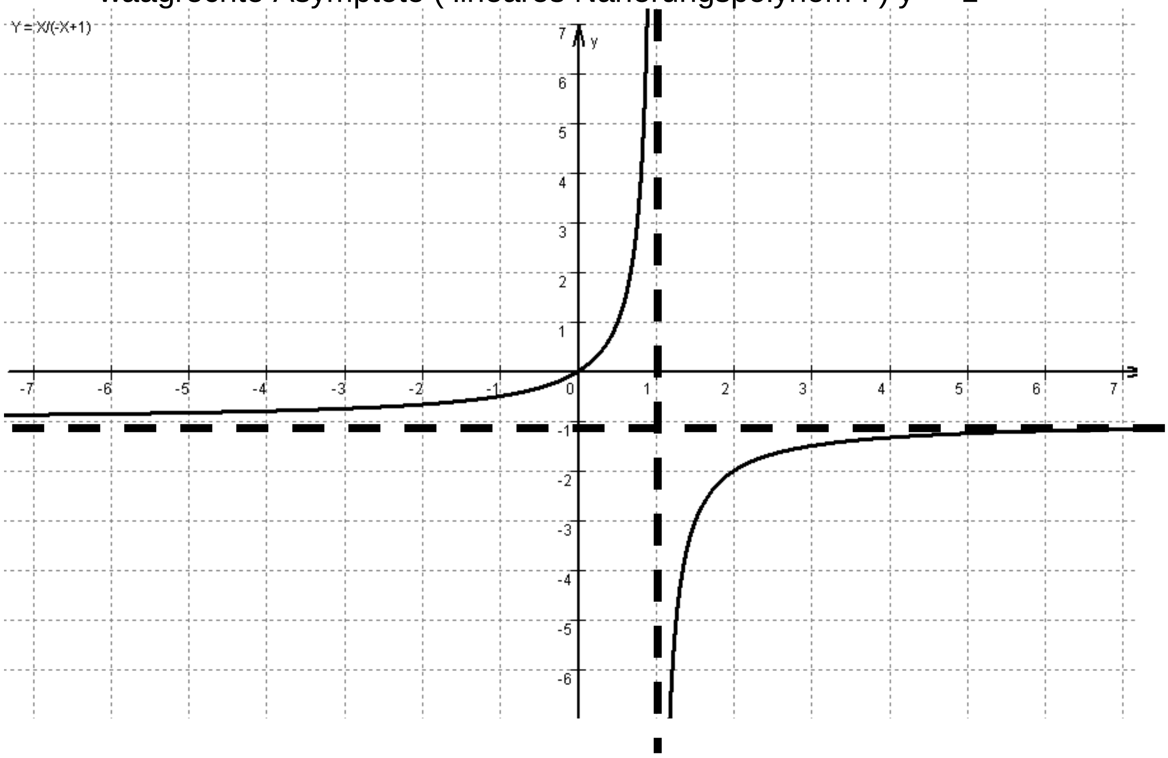
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{1-x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x(\frac{1}{x}-1)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}-1}=-1$$

Auch hier hilft Polynomdivision bzw. algebraischer Ergänzung weiter

$$x:(1-x)=x:(-x+1)=-1+\frac{1}{-x+1}\quad bzw.$$

$$\frac{x}{1-x}=\frac{x-1+1}{1-x}=\frac{x-1}{1-x}+\frac{1}{1-x}=\frac{-(-x+1)}{1-x}+\frac{1}{1-x}=-1+\frac{1}{1-x}$$

waagrechte Asymptote (lineares Näherungspolynom !) y = -1



g: $f(x)=\frac{1}{1+x}$ D=R\{-1}

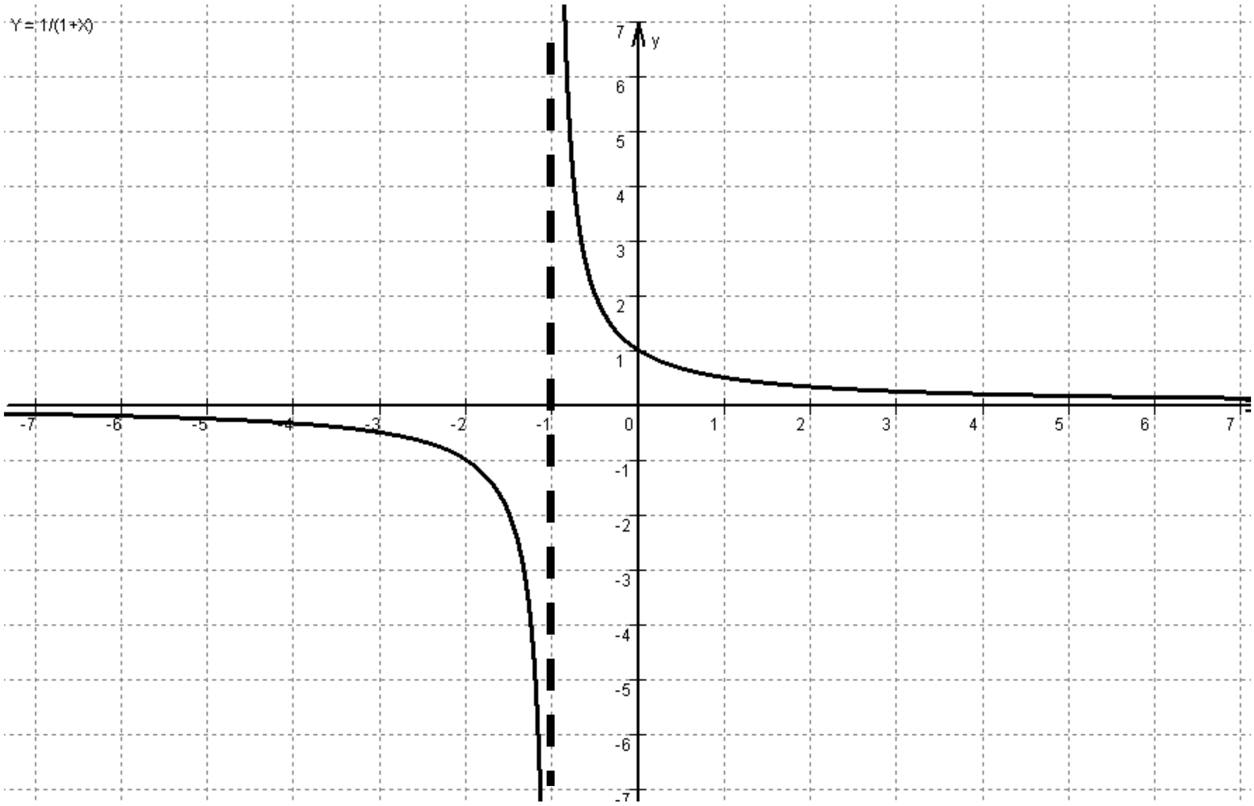
N={ } P={-1} Vielfachheit 1, d. h. mit VZW

Nennergrad > Zählergrad, d. h. waagrechte Asymptote y = 0

da $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1+x}=\pm 0$

Translation – siehe 10. Jgstufe ! – liefert

$f_1(x)=\frac{1}{x}\rightarrow f_2(x)=\frac{1}{x+1}$ *mit* $x'=x+1$ *Verschiebung um* 1 *nach links*



i: $f(x)=\frac{x^2}{1-x}$ D=R\{+1}

N={0} Vielfachheit 2, kein VZW P={+1} Vielfachheit 1, d. h. mit VZW

Nennergrad < Zählergrad, d. h.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{1-x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x(\frac{1}{x}-1)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{\frac{1}{x}-1}=\mp\infty$$

Spezialfall: Zählergrad = Nennergrad + 1

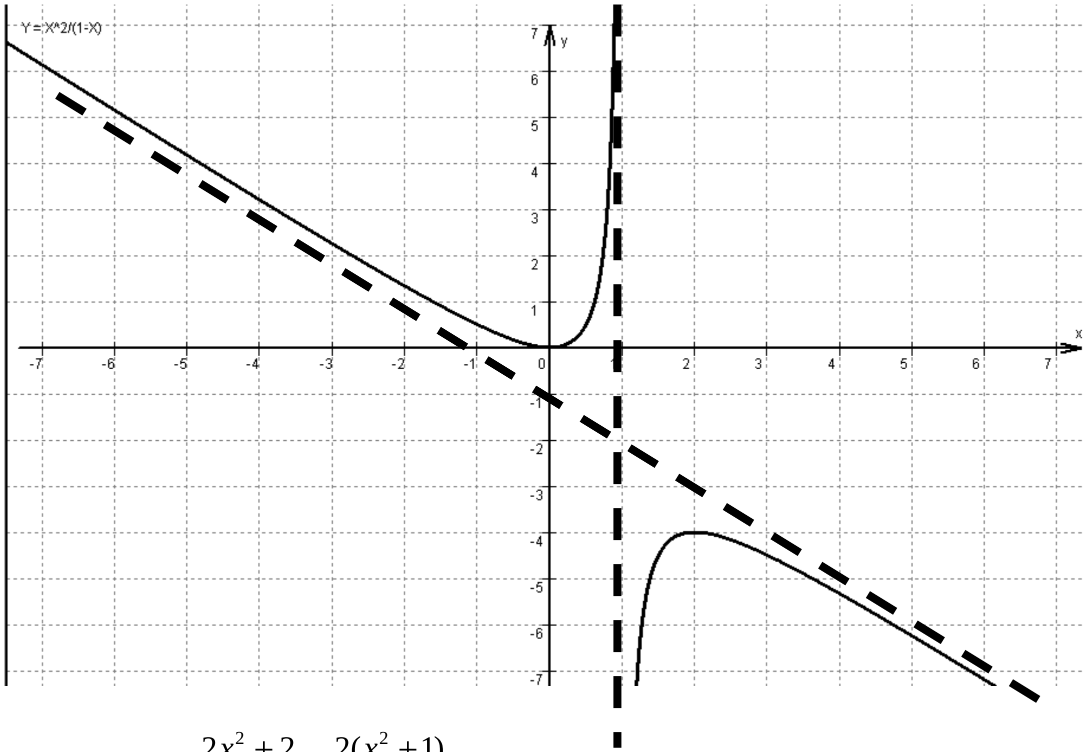
weiter mit Polynomdivision bzw. algebraischer Ergänzung

$$x^2:(1-x)=x^2:(-x+1)=-x-1+\frac{1}{-x+1}\ bzw.$$

$$\frac{x^2}{1-x}=\frac{x^2-x+x}{1-x}=\frac{x^2-x}{1-x}+\frac{x}{1-x}=\frac{-x(-x+1)}{1-x}+\frac{x}{1-x}=-x+\frac{x-1+1}{1-x}$$

$$-x+\frac{x-1}{1-x}+\frac{1}{1-x}=-x-1+\frac{1}{1-x}$$

schiefe Asymptote (lineares Näherungspolynom !) y = -x-1



k: $f(x) = \frac{2x^2+2}{x^2+1} = \frac{2(x^2+1)}{x^2+1} = 2$ D=R

Es handelt sich gar nicht um eine gebrochen rationale Funktion, sondern um eine „versteckte“ ganze rationale Funktion, ja sogar eine sehr einfache !
(im Prinzip mit einer waagrechten Asymptote y = 2)

l: $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2} = 1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}$ D=R\{0}

N=? P={0} Vielfachheit 2, d. h. kein VZW

So umgestellt lässt sich zwar sofort die waagrechte Asymptote y = 1 ablesen, aber die Frage nach den Nullstellen im Zähler bleibt:

Vieta hilft weiter oder erraten der Nullstelle x = 2 oder Mitternachtsformel:

$f(x) = \frac{x^2-x-2}{x^2} = \frac{(x-2)(x+1)}{x^2}$, also N={2;-1} jeweils mit VZW