Do, 30.4.2020, 10a, Mathematik

Lösung zum letzten Arbeitsauftrag

BS 115/4

a: $x^3 - 8 = 0 \ \ \mathit{Lösung\ mit}\ x = 2\ \mathit{erraten}{:}\ \ \mathit{Ansatz}\ \ \ x^3 - 8 = (\,x - 2)(x^2 + \cdots .+4)$

Die fehlende Lücke lässt sich aus folgendem Ansatz erschließen:

der x-Term muss 0 ergeben - also 4x -2*(...) = 0 $\Rightarrow$ $\ \mathit{Lücke\ mit}\ 2x\ \mathit{besetzen}$

Kontrolle: $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = x^3 + 2x^2 + 4x - 2x^2 - 4x - 8 = x^3 - 8\ ok$

Also gilt: $x_1 = 2 - \mathit{weiter\ mit\ Mitternachtsformel}{:}$

$$D = 2^2 - 4 * 1 * 4 = \ -12 < 0 \Rightarrow \mathit{keine\ weitere\ Lösungen}$$

Schnittpunkte: $S_1(2\,/\,3\,)$ Kontrolle durch Einsetzen in beide Funktionsterme!

b: $0{,}5x^3 + x^2 - 10x + 12 = 0\ \ \mathit{Lösung\ mit}\ x = 2$ oder 4 erraten

(wegen 0,5 $\rightarrow$ $\ \mathit{Ergebnis\ mus\ ganzzahlig\ sein}!$)

Test für x=2: 0,5*8 + 4 - 20 +12 = 4+4-20+12 = 0 ok - Nullstelle gefunden: x = 2
weiter mit Polynomdivision - der „Raten„ -Ansatz ist hier nicht sinnvoll!

```
(1/2x^3  +  x^2  - 10x  + 12) : (x - 2)  =  1/2x^2 + 2x - 6
 1/2x^3  -  x^2
 ____________________________
            2x^2  - 10x  + 12
            2x^2  -  4x
            _________________
                  - 6x  + 12
                  - 6x  + 12
                  ___________
                           0
```

also gilt:

$$0{,}5x^3 + x^2 - 10x + 12 = (x - 2)\left(\frac{1}{2}x^2 + 2x - 6\right) = 0$$

Untersuchung der Diskriminante: $D\ = 2^2 - 4 * \frac{1}{2} * (-6) = 4 + 12 = 16, \mathit{also}\ 2\ \mathit{weitere\ Lösungen}$

$$x_2 = \frac{1}{2 * \frac{1}{2}}\,(\,-2 + 4\,) = 2\ \vee\ x_3 = \frac{1}{2 * \frac{1}{2}}\,(\,-2 - 4\,) = -3$$

Schnittpunkte: $S_{1/2}(\,2\,/\,4\,)\ \mathit{mit\ Vielfachheit}\ 2\ \mathit{und}\ S_3\,(\,-3\,/\,-13{,}5\,)$

c: $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0\ \ - \mathit{wieder\ erraten\ mit\ Analyse\ der\ kleinsten\ Potenz}{:}\ 1\ \mathit{oder}\ 3$

Test mit x = 1: 1 - 3 - 1 + 3 = 0 ok - Nullstelle gefunden

wieder mit Polynomdivision:

```
(x^3  - 3x^2   -   x   + 3) : (x - 1)   =  x^2 - 2x - 3
 x^3  -   x^2
 ______________________________
        - 2x^2   -   x   + 3
        - 2x^2   + 2x
        _______________________
                 - 3x   + 3
                 - 3x   + 3
                 ______________
                            0
```

weiter mit der Diskriminante:

$$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 * 1 * (-3\,) = 16, also\ 2\ weitere\ Lösungen$$

$x_2 = \frac{1}{2}\,(\,2 + 4\,) = 3\ \vee\ x_3 = \frac{1}{2}\,(\,2 - 4\,) = -1$, alle mit Vielfachheit 1 (keine tritt doppelt auf!)

Schnittpunkte: $S_1(\,1\,/\,2\,), S_2(\,3\,/\,4\,)\ S_3\,(\,-1\,/\,0\,)$

d: $x^3 - x = x(x^2 - 1) = 0\ \ mit\ den\ Nullstellen$:

$$x_1 = 0, x_2 = +1\ und\ x_3 =\ -1\ alle\ mit\ Vielfachheit\ 1$$

Schnittpunkte: $S_1(\,0\,/\,0\,), S_2(\,1\,/\,1\,)\ S_3\,(\,-1\,/\,-1\,)$

Dieses einfache Beispiel hatten wir schon mehrfach - also nichts Neues!

e: $x^4 + x^2 - 2 = 0$ erraten mit x = 1 liefert sofort eine Nullstelle

weiter mit Polynomdivision:

```
(x^4          +   x^2          - 2) : (x - 1)   =   x^3 + x^2 + 2x + 2
 x^4   - x^3
 _________________________________
         x^3  +   x^2          - 2
         x^3  -   x^2
         __________________________
                 2x^2          - 2
                 2x^2   - 2x
                 __________________
                          2x   - 2
                          2x   - 2
                          _________
                                 0
```

Bleibt ein Polynom 3. Grades - wieder keine direkte Lösungsmöglichkeit - noch einmal raten:

x = 1 falsch, x = - 1 ist richtig, also weitere Nullstelle $x_2 =\ -1$

weiter mit Polynomdivision

```
(x^3  + x^2  + 2x  + 2) : (x + 1)   =  x^2 + 2
 x^3  + x^2
 ______________________
               2x  + 2
               2x  + 2
               _______
                     0
```

Hurra - es gilt: $x^2 + 2 > 0\ \forall\ x = R, das\ bereits\ x^2 > 0$!! $-\ also\ keine\ weiteren\ Nullstellen$

Beide Nullstellen mit Vielfachheit 1 - also:

$S_1(1 / 2), S_2 (-1 / 2)$

f: sehr wichtig - bitte nicht ausmultiplizieren - Faktoren sind zur Untersuchung von Zahlen und Funktionen lebenswichtig!

Umstellen und ausklammern - haben wir bestimmt schon 100-mal gehabt!

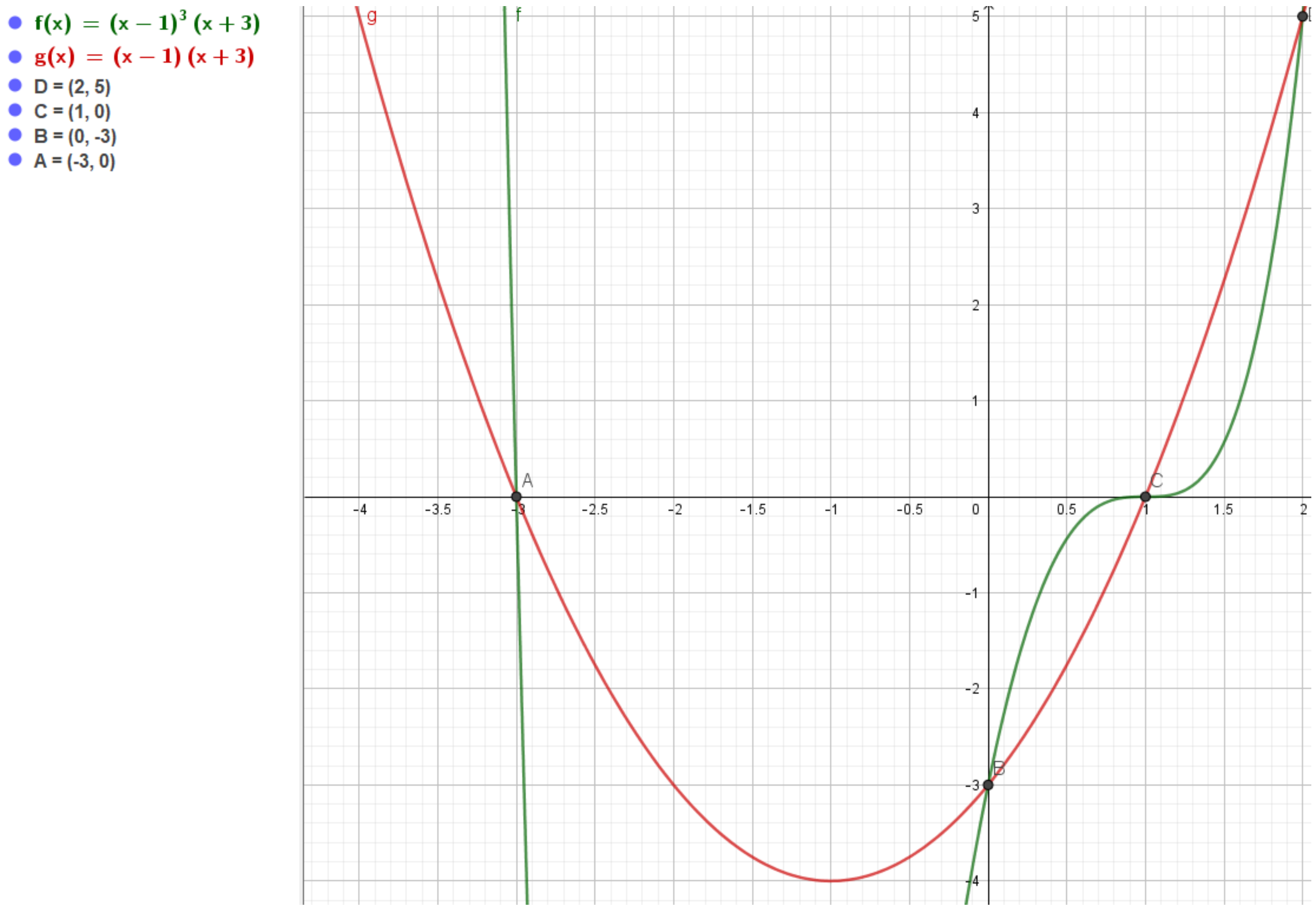
$$(x - 1)^3(x + 3) - (x - 1)(x + 3) = (x - 1)(x + 3)[(x - 1)^2 - 1] =$$

$$(x - 1)(x + 3)[x^2 - 2x + 1 - 1] = (x - 1)(x + 3)[x^2 - 2x] = (x - 1)(x + 3)x(x - 2)$$

Man findet also 4 Nullstellen mit jeweils der Vielfachheit 1 (keine 2 fallen zusammen)

$S_1(0 / \ -3), S_2(1 / 0), S_3 (2 / 5), S_4 (-3 / 0)$

Kontrolle mit z. Bsp. Geogebra



Wieder wie in den letzten beiden Stunden kein Arbeitsauftrag, sondern ausführliche selbstständige Nachbearbeitung der HA - ich kann nur noch einmal mahnen:

die jetzt vorgeführten Werkzeuge zur Untersuchung von Funktionen sind unverzichtbar in der Oberstufe.
Ich weiß, ich gehe im Moment etwas schnell vor - wir werden genügend Gelegenheit zum Vertiefen und Wiederholen bekommen - aber zuerst einmal müsst ihr die Werkzeuge kennenlernen!

HA

gelber Kasten links auf S. 118