Hessesche Normalenform zur Abstandsmessung

Die spezielle NF unter Benutzung eines Normaleneinheitsvektors $\overrightarrow{n^0}$ ermöglicht eine einfache Abstandsmessung von P zur Ebene.

Diese Abstandsmessung ergibt jeweils ein Ergebnis mit einem Vorzeichen:
Minus ←→ P liegt in der Raumhälfte des Ursprungs
Plus ←→ P liegt in der dem Ursprung gegenüberliegenden Raumhälfte

Vorgehensweise:
1. Skaliere NF so, dass der verwendete Normalenvektor die Länge 1 besitzt

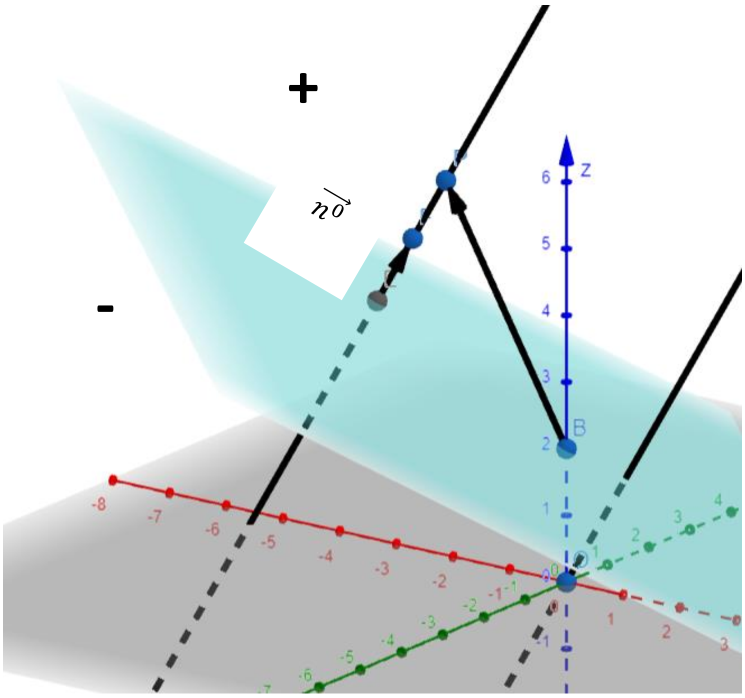
$$E\ \ NF:\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 5 = 0 \qquad mit\ |\vec{n}\ | = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = 3$$

$$E\ \ HNF:\ \tfrac{1}{3}(2x_1 - 2x_2 + x_3 + 5\,) = 0 \ \ |*(\,-1\,)$$

2. Falls die Konstante positiv ist, ändert man alle Vorzeichen durch Multiplikation mit -1

$$E\ \ HNF:\ \tfrac{1}{3}(-2x_1 + 2x_2 - x_3 - 5\,) = 0$$

wichtig:
Der Normalenvektor der HNF zeigt immer von O aus gesehen weg in die positive Raumhälfte.



Wiederholung:

Das Skalarprodukt zwischen einem Einheitsvektor und einem Vektor ergibt die Länge der Projektion des Vektors auf den Einheitsvektor

Folgerung:

$$\overrightarrow{n^0} * (\,\vec{p}\ -\ \vec{b}\,) = d(P;E)$$

Beispiele:
* Abstand der Ebene E zum Ursprung

P(0/0/0) in die HNF einsetzen: d(O; E) = $\frac{1}{3}\ (\,0 + 0 + 0 - 5\,) = -\frac{5}{3}$

* Abstand von P(- 3 / 15 / 15) zur Ebene E

P(-3/15/7) in die HNF einsetzen: d(P; E) = $\frac{1}{3}\ (\,6 + 15 - 7 - 5\,) = \frac{24}{3} = 8$
P liegt also in der vom Ursprung abgewandten Raumhälfte
Anwendung:

Konstruiere den Fußpunkt F des Lotes von P auf die Ebene E

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} -3 \\ 15 \\ 7 \end{pmatrix} + (-8) * \overrightarrow{n^0} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + (-3) * \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ 29/3 \\ 29/3 \end{pmatrix},$$

also $F(\frac{7}{3} / \frac{29}{3} / \frac{29}{3})$

Alternativ kann man die Lotgerade auf E durch P aufstellen und den Schnittpunkt berechnen.

HA: Die Punkte A(-4 / 2 / - 3), B(-1 / -6 / 0) und C(2 / -4 / -2) spannen die Ebene G auf. Zusammen mit S(1 / 5 / 2) bilden diese Punkte eine dreiseitige Pyramide.

a: Stelle die NF von G auf
[Zwischenergebnis: $2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 20 = 0$]

b: Bestimme d(S;G)
Zwischenergebnis: d(S;G) = - 7

c: Bestimme den Fußpunkt F des Lotes von der Spitze S auf G
Ergebnis: F(-1 / 2 / - 4)